


Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DU MAGNÉTISME;

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie royale des Sciences le 2 Février 1824.

LES physiciens ont expliqué les attractions et les répulsions électriques, en les attribuant à deux fluides distincts, qui sont tels, que les molécules de chacun d'eux repoussent celles du même fluide et attirent avec la même force celles de l'autre fluide; et la loi de cette force, conclue de l'observation directe, est celle de la raison inverse du carré des distances, la même que la loi de l'attraction newtonienne, qui paraît régir toutes les actions des corps, sensibles à de grandes distances. En partant de cette hypothèse, on a déterminé par l'analyse mathématique la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs, la pression électrique qui a lieu de dedans en dehors en chaque point de cette surface, et l'action de la couche électrique qui la recouvre, sur un point quelconque de l'espace. Les résultats du calcul se sont trouvés parfaitement d'accord avec les nombreuses expériences que Coulomb a faites, il y a près de quarante ans,

sur cette matière ; et maintenant cette partie de l'électricité où l'on suppose les deux fluides en repos, et où l'on fait abstraction de toute action propre de la matière des corps électrisés, est complète, ou du moins elle ne présente plus que des difficultés d'analyse relatives à la forme et au nombre des corps soumis à leur influence mutuelle.

L'induction a suffi pour attribuer de même les attractions et les répulsions magnétiques à deux fluides impondérables, que les physiciens ont appelés *fluide boréal* et *fluide austral.* Il était naturel de leur supposer le même mode d'action réciproque; et, en effet, à la même époque où Coulomb a démontré par l'observation la loi élémentaire des actions électriques, en raison inverse du carré des distances, il a aussi conclu de ses expériences que cette loi convient également aux actions magnétiques. Toutefois, les preuves qu'il a données et qui sont incontestables pour l'électricité, sont loin d'être aussi concluantes par rapport au magnétisme; mais cela n'empêche pas d'admettre la même loi pour les actions à distances de ces deux genres de fluides impondérables, sauf à montrer que les conséquences qui s'en déduisent par un calcul rigoureux, s'accordent complétement avec l'expérience, pour le magnétisme comme pour l'électricité.

Indépendamment de la similitude des attractions et répulsions électriques et magnétiques, il existe encore une autre analogie entre le magnétisme et l'électricité : je veux parler de la distinction des corps en deux classes, selon qu'ils perdent ou conservent plus ou moins long-temps l'état électrique ou magnétique qu'on leur a fait prendre. Relativement à l'électricité, les corps que l'on appelle *conducteurs*, s'électrisent instantanément par l'influence de corps voisins déjà électrisés; et aussitôt qu'on les a soustraits à cette influence, ils ne conservent aucune trace d'électricité. Au contraire, les corps *non conducteurs* ne s'électrisent pas sensiblement par influence, à

moins qu'elle ne soit très-forte ou très-prolongée; mais, lorsqu'on les a électrisés par d'autres moyens, ils conservent en chacun de leurs points l'électricité qu'on y a introduite, et qui s'y trouve retenue par une action propre de la matière de ces corps. A cet égard, les corps susceptibles d'aimantation se comportent d'une manière analogue : les uns, comme le fer doux, par exemple, qui n'a été ni tordu ni écroui, s'aimantent par l'influence d'un aimant voisin; et dès qu'ils en sont éloignés, ils ne donnent plus de signes de magnétisme : les autres, tels que l'acier trempé, ne s'aimantent que très-difficilement par influence; mais, si l'on a excité en eux le magnétisme par d'autres moyens plus puissans, ils conservent cet état magnétique, sans doute aussi en vertu de quelque action particulière que leur matière exerce sur les deux fluides boréal et austral.

Telles sont les analogies principales que l'observation fait d'abord reconnaître entre l'électricité et le magnétisme; mais, d'un autre côté, il existe entre ces deux affections des corps des différences essentielles, que nous allons rappeler, et qui ne permettent pas d'appliquer au magnétisme sans restriction la théorie de l'électricité.

L'électricité pénètre dans toutes les substances, soit pour les traverser librement, soit pour s'attacher à leurs molécules; au contraire, ce n'est que dans un très-petit nombre de corps, dans le fer à différens états, dans l'acier, le nickel et le cobalt, que l'on a reconnu distinctement des traces d'aimantation. D'après cela, l'on a pu se demander si le magnétisme est un fluide particulier, qui n'existe que dans les corps susceptibles d'aimantation, ou si ce n'est que le fluide électrique modifié par quelques propriétés spéciales de ces corps et distribué d'une manière particulière dans leur intérieur. Nous ne croyons pas qu'on puisse décider cette question dans l'état actuel de la science; tout ce qu'on a prouvé jusqu'ici, c'est qu'on parvient

à développer le magnétisme dans les corps par l'action de l'électricité : mais l'identité du fluide magnétique et du fluide électrique ne résulte pas nécessairement des faits importans qui ont été récemment découverts. Heureusement la solution de cette question n'importe nullement à l'objet de ce Mémoire; notre analyse est indépendante de la nature particulière des fluides boréal et austral : notre but est simplement de déterminer les résultantes de leurs attractions et répulsions, et, s'il est possible, comment ils sont distribués dans les corps aimantés.

Sur ce dernier point, l'opinion des physiciens n'a pas toujours été la même. Avant les travaux de Coulomb sur le magnétisme, on supposait les deux fluides transportés dans l'acte de l'aimantation aux deux extrémités des aiguilles de boussole et accumulés à leurs pôles; tandis que, suivant cet illustre physicien, les fluides boréal et austral n'éprouvent que des déplacemens infiniment petits, et ne sortent pas de la molécule du corps aimanté à laquelle ils appartenaient avant l'aimantation. Cette opinion, très-singulière au premier abord, est cependant celle qui a généralement prévalu; mais la théorie dont elle est le principe ne pouvait être convenablement développée que par l'analyse mathématique, ainsi qu'on le verra dans la suite de ce Mémoire. Voici le fait général sur lequel l'opinion de Coulomb est établie, et qui ne permet pas, selon nous, de douter de la nécessité de son hypothèse.

Si l'on approche d'un aimant un morceau de fer doux, celui-ci s'aimantera par influence, et, dans le contact, ces deux corps adhéreront l'un à l'autre plus ou moins fortement. Il en sera de même à l'égard d'un ou de plusieurs autres morceaux de fer qu'on approchera du premier : ces autres corps s'aimanteront aussi par influence, et ils adhéreront au premier dans le contact. Cela étant, si l'on sépare ces différens morceaux de fer, et qu'on les soustraie ensuite à l'influence de l'aimant,

on trouve qu'ils sont tous revenus à leur état naturel, et qu'aucune portion de fluide magnétique n'a passé ni de l'aimant dans le fer, ni d'un morceau de fer dans un autre. Or c'est là une différence capitale entre le magnétisme et l'électricité des corps conducteurs ; car l'électricité passe librement d'un de ces corps dans un autre, lorsqu'ils sont en contact, ou seulement quand ils sont assez rapprochés pour que la pression de l'air qui contient l'électricité à leurs surfaces, soit vaincue par les pressions électriques. Ce fait, relatif au fluide magnétique, est général ; il est indépendant de la forme et du volume des morceaux de fer doux qu'on met en contact, aussi-bien que de leur degré de magnétisme ou de la force de l'aimant qui agit sur eux : quelqu'intime que le contact ait été, et quelque temps qu'il ait duré, ce fluide ne passe jamais d'un morceau de fer dans l'autre; d'où il est naturel de conclure qu'aucune quantité appréciable de magnétisme n'est transportée non plus d'une partie dans l'autre du même morceau de fer, et que les deux fluides boréal et austral que ce métal contient à l'état naturel, n'éprouvent dans son intérieur que des déplacemens insensibles, lorsqu'ils sont séparés l'un de l'autre par une action extérieure. Cette conclusion s'étend également aux corps aimantés qui retiennent le magnétisme qu'on leur a fait prendre, soit par l'influence prolongée d'un fort aimant, soit par d'autres procédés d'aimantation ; la seule différence qu'il y ait à cet égard entre ces corps et le fer doux, c'est qu'il existe en eux, comme nous l'avons dit plus haut, une force particulière à chaque substance, que l'on connaît sous le nom de *force coercitive*, dont l'effet est d'arrêter les particules de l'un et de l'autre fluide dans la position qu'elles occupent, et de s'opposer ainsi à la séparation des deux fluides et ensuite à leur réunion.

Non-seulement il n'existe qu'un très-petit nombre de substances susceptibles d'aimantation, mais dans des circonstances

exactement pareilles l'intensité de l'action magnétique n'est pas la même dans ces diverses substances. Ainsi deux masses de même forme et de même volume, l'une de fer et l'autre de nickel, dans lesquelles la force coercitive est insensible, et qui sont soumises à l'influence d'un même aimant, exercent au-dehors des forces différentes sur des points semblablement placés par rapport à chacune d'elles. Ce fait établit encore une différence essentielle entre le magnétisme et l'électricité; car les attractions ou répulsions exercées par des corps conducteurs, qui sont électrisés par la même influence extérieure, ne dépendent que de leurs formes et de leurs dimensions, et nullement de la matière dont ces corps sont formés. Il a été mis hors de doute, relativement aux actions comparées du fer et du nickel, par une expérience récente de M. Gai-Lussac, dont voici les détails et le résultat.

On a fait osciller, de part et d'autre du méridien magnétique, une aiguille horizontale, librement suspendue par son milieu; cette aiguille aimantée, longue de $0^m,2$, faisait dix oscillations en $131''$, en vertu de l'action de la terre; on a posé au-dessous, dans le même méridien, sur un plan fixe horizontal, éloigné de l'aiguille de $0^m,05$, un barreau prismatique de fer doux, dont la longueur était de $0^m,196$, la largeur de $0^m,018$, l'épaisseur verticale de $0^m,0014$, et dont le milieu se trouvait dans la même verticale que le point de suspension de l'aiguille : les oscillations de celle-ci se sont aussitôt accélérées, de manière qu'il y en a eu d'abord dix en $65''$, et bientôt le même nombre en $60''$, terme auquel l'accélération s'est arrêtée. Cela fait, on a enlevé le barreau de fer doux, qu'on a remplacé par un barreau de nickel pur de même forme et de mêmes dimensions; l'aiguille a fait alors dix oscillations en $78''$, et son mouvement s'est un peu accéléré jusqu'à ce qu'elle ait fait le même nombre d'oscillations en $77''$. Le barreau de nickel ayant aussi été enlevé, l'aiguille

a repris à très-peu près son mouvement primitif : elle a fait dix oscillations en 130″, en vertu de la seule action de la terre. On n'a reconnu dans les barreaux de fer et de nickel aucune trace de magnétisme après cette opération ; ce qui montre que la force coercitive était du moins très-faible dans ces métaux. Cependant on pourrait croire qu'elle n'était pas tout-à-fait nulle, puisque les deux barreaux ne sont pas parvenus subitement à l'état où ils exerçaient leur plus grande influence sur le mouvement de l'aiguille ; mais cette circonstance peut aussi tenir à la réaction de leur fluide magnétique sur celui de l'aiguille, réaction dont l'effet n'a dû parvenir à son *maximum* qu'après un certain intervalle de temps, à cause de la force coercitive de l'acier trempé dont l'aiguille était formée. Quoi qu'il en soit, on doit conclure de cette expérience, dans laquelle tout a été semblable par rapport au fer et au nickel, que ces deux métaux, ayant été aimantés par l'influence d'un même aimant, qui était l'aiguille d'acier, ont réagi avec des forces inégales, l'action du fer surpassant notablement celle du nickel.

Peut-être pensera-t-on que cette inégalité d'action magnétique des corps aimantés de matières différentes tient à ce que chacune de ces substances renferme à l'état *neutre* une quantité limitée de fluide boréal et de fluide austral, laquelle quantité serait plus grande, par exemple, dans le fer que dans le nickel. Mais cette manière de voir serait contraire aux phénomènes : les quantités égales des deux fluides qui sont contenues dans chaque corps à l'état neutre, sont pour nous illimitées, c'est-à-dire qu'avec les forces dont nous pouvons disposer, nous ne parvenons jamais à les séparer entièrement dans l'acte de l'aimantation ; car, lorsqu'un corps est aimanté par l'influence d'un aimant voisin, les physiciens admettent que l'intensité de son action magnétique, manifestée par les effets produits au-dehors, s'accroît sans cesse à mesure que

l'on augmente la force de l'aimant qui agit sur ce corps; ce qui suppose évidemment que l'on n'a pas atteint la limite de décomposition du fluide neutre qu'il renferme, de même que l'on ne parvient pas non plus à séparer en totalité les deux fluides *vitré* et *résineux* dans l'intérieur d'un corps conducteur de l'électricité.

D'un autre côté, si l'on ne trouvait pas dans la constitution intime des corps de matières différentes qui recèlent le fluide magnétique, quelque différence à laquelle on pût attribuer l'inégalité de leur action magnétique, il faudrait en conclure que ce serait le fluide même qui agirait, en quantité et à distance égales, avec des intensités diverses, selon qu'il appartiendrait à un corps ou à un autre. Cette conclusion ne serait pas contraire à l'idée que nous nous formons du fluide magnétique ; car, cette substance impondérable ne devant jamais quitter les parties des corps où elle réside, il se pourrait qu'elle fût un fluide particulier à chaque corps, qui ne posséderait pas le même pouvoir attractif ou répulsif dans des corps de nature différente. Mais, après avoir beaucoup réfléchi à cette question, j'ai été conduit à penser que l'on pouvait attribuer l'inégalité d'action magnétique de ces corps à une circonstance que je vais expliquer.

Dans l'acte de l'aimantation, les deux fluides boréal et austral qui étaient réunis à l'état neutre, sont, comme nous l'avons dit, très-peu écartés les uns des autres. Nous ne déciderons pas si les parties des corps aimantés dans lesquelles la décomposition du fluide neutre peut s'effectuer, sont les molécules mêmes de ces corps; nous supposerons seulement que leurs dimensions sont toujours extrêmement petites; et, pour abréger le discours, nous appellerons *élément magnétique* chacune de ces petites parties dont la propriété caractéristique consiste en ce que les quantités des deux fluides y seront égales entre elles, dans l'état d'aimantation comme dans l'état neutre. Or

nous pouvons concevoir, pour envisager la question dans sa plus grande généralité, que les élémens magnétiques ne sont pas contigus dans l'intérieur des corps aimantés; qu'ils y sont, au contraire, séparés les uns des autres par des espaces pleins ou vides, où les deux fluides ne peuvent pénétrer, et que les dimensions de ces intervalles isolans sont du même ordre de grandeur que celles des élémens magnétiques, sans que cependant le rapport des unes aux autres soit le même dans les corps aimantés de nature différente. Cela étant, les attractions ou répulsions exercées par ces corps, dans les mêmes circonstances, seront différentes, comme l'expérience l'a déjà fait connaître à l'égard du nickel et du fer. Ainsi nous nous représenterons un corps aimanté comme un assemblage de parcelles magnétiques, séparées par des espaces inaccessibles au magnétisme; le rapport de la somme de toutes ces parcelles au volume entier du corps, qu'on pourrait prendre pour sa *densité* sous le rapport du magnétisme, sera une fraction qui approchera plus ou moins de l'unité dans les corps de nature diverse, et qui devra être donnée pour chaque corps en particulier. Les actions extérieures augmenteront ou diminueront d'intensité avec la grandeur de ce rapport. On verra, dans ce Mémoire, suivant quelle loi elles en dépendent; et, sur ce point, il sera possible de vérifier la théorie par l'expérience; car on pourra toujours faire varier à volonté le rapport dont nous parlons, en mélangeant dans telle proportion qu'on voudra de la limaille de fer très-fine avec une autre matière non magnétique : on soumettra ces corps ainsi formés à l'influence d'un très-fort aimant, et l'on mesurera ensuite les attractions ou répulsions qu'ils seront capables d'exercer.

Quant au pouvoir attractif ou répulsif des deux fluides, nous supposerons maintenant qu'il est le même dans tous les corps aimantés, à distance égale et pour des quantités égales

de fluide. C'est en effet la supposition la plus simple qu'on puisse faire *à priori*; et, l'inégalité d'action du fer et du nickel pouvant s'expliquer par une autre considération, aucun fait observé jusqu'ici ne nous oblige à nous en écarter. Il serait bon, néanmoins, que ce point fût éclairci par l'expérience. Voici celle que l'on pourrait faire pour le décider complétement.

Supposons qu'une aiguille aimantée, librement suspendue à la manière de Coulomb, soit soumise aux actions simultanées de plusieurs aimans formés de toutes les matières susceptibles d'aimantation; supposons, de plus, que les distances de ces aimans à cette aiguille soient assez grandes, par rapport à sa longueur, pour que la résultante des actions qu'ils exercent sur chaque particule du fluide appartenant à l'aiguille, soit constante et parallèle à elle-même dans toute cette longueur : il est évident que la direction de cette force sera celle que l'aiguille prendra, quels que soient sa force coercitive, sa forme et son degré d'aimantation, si toutefois la force de torsion du fil auquel elle est suspendue, est très-faible et peut être négligée par rapport à l'action des aimans. Si donc l'expérience est faite successivement sur des aiguilles de fer, d'acier, de nickel, de cobalt, aimantées d'une manière quelconque, et prises, pour plus de généralité, à *différens* degrés de température, elles devront toutes prendre la même direction, à moins que l'action du fluide appartenant à l'un des aimans ou à plusieurs d'entre eux ne soit pas la même sur tous les fluides contenus dans les différentes matières de ces aiguilles : par conséquent, si elles ne prennent pas toutes la même direction, sans qu'on ait rien changé à la disposition des aimans, il faudra rigoureusement en conclure que le pouvoir attractif ou répulsif des fluides boréal et austral varie avec la nature des corps qui les contiennent; et, dans le cas contraire, qui est le plus présumable, il sera prouvé

que ce pouvoir est indépendant de la matière et de la température des corps, ainsi que nous le supposerons dans ce Mémoire.

La quantité que nous introduirons dans nos calculs, et qui exprimera le rapport de la somme des volumes des élémens magnétiques au volume entier du corps dont ils font partie, pourra dépendre de la température de ce corps. Il est possible, effectivement, que la chaleur dilate les espaces qui séparent les élémens les uns des autres, et comprime ces élémens, ou *vice versâ*, sans changer dans le même rapport le volume total. Dans cette hypothèse, les attractions ou répulsions magnétiques exercées par un même corps varieront avec son degré de chaleur; ce qui paraît déjà indiqué par une ancienne expérience du physicien Canton, dans laquelle il a vu la déviation d'une aiguille de boussole, produite par l'action d'un barreau aimanté, diminuer à mesure que la température de ce barreau augmentait, et par d'autres observations plus étendues que Coulomb a laissées inédites, et qui ont été publiées par M. Biot dans le tome IV de son *Traité de physique.* Mais, ces diverses expériences ayant été faites sur des barreaux aimantés où la force coercitive était loin d'être nulle, les effets observés étaient dus sans doute à-la-fois à la variation de cette force et au changement du rapport dont nous parlons. Pour constater la variation de ce rapport et en trouver les lois, il serait donc nécessaire que les mêmes expériences fussent répétées sur le fer doux et sur le nickel pur à différentes températures; il serait même utile d'étendre ce genre d'observations à d'autres métaux où le magnétisme ne s'est pas encore manifesté, et de chercher s'ils ne deviendraient pas susceptibles d'aimantation à de très-basses températures. En effet, l'analogie porte à croire qu'il existe des élémens magnétiques dans tous ces corps qui jouissent déjà de tant de propriétés communes, mais que le rapport de la

somme de leurs volumes au volume entier de chaque corps, d'où dépend l'intensité de ses actions magnétiques, est une fraction très-petite dans la plupart des métaux connus : or, si ce rapport varie avec la température, et s'il augmente, par exemple, quand la chaleur diminue, il se pourrait qu'en abaissant convenablement la température d'un métal, ce rapport y devînt assez grand pour que ce corps fût alors susceptible d'aimantation à un degré sensible.

Lorsque la température d'un corps aimanté variera d'un point à un autre, le rapport en question variera de même, s'il dépend de la chaleur. Les lois des attractions ou répulsions exercées au-dehors par un tel corps dépendront de cette variation. Elles changeront si le corps vient à se refroidir inégalement dans ses différentes parties; il en résultera des effets dont nous pourrons nous occuper dans un autre Mémoire, et auxquels on doit peut-être rapporter les anomalies singulières observées dans le fer incandescent (1).

Le rapport entre la somme des élémens magnétiques et le volume entier dans chaque corps aimanté n'est pas la seule donnée relative à ce corps, indépendamment de sa forme et de ses dimensions, d'où puisse dépendre l'intensité de ses actions magnétiques : la forme des élémens pourra aussi influer sur cette intensité; et cette influence aura cela de particulier, qu'elle ne sera pas la même en des sens différens. Supposons, par exemple, que les élémens magnétiques sont des ellipsoïdes dont les axes ont la même direction dans toute l'étendue d'un même corps, et que ce corps est une sphère aimantée par influence, dans laquelle la force coercitive est nulle; les attractions ou répulsions qu'elle exercera au-dehors seront différentes dans le sens des axes de ses élémens et dans tout autre sens; en sorte que, si l'on fait tourner

(1) *Annales de physique et de chimie*, tome XX, page 427.

cette sphère sur elle-même, son action sur un même point changera, en général, en grandeur et en direction : mais, si les élémens magnétiques sont des sphères de diamètres égaux ou inégaux, ou bien s'ils s'écartent de la forme sphérique, mais qu'ils soient disposés sans aucune régularité dans l'intérieur d'un corps aimanté par influence, leurs formes n'influeront plus sur les résultats qui dépendront seulement de la somme de leurs volumes, comparée au volume entier de ce corps, et qui seront alors les mêmes en tout sens. Ce dernier cas est celui du fer forgé, et sans doute aussi des autres corps non cristallisés dans lesquels on a observé le magnétisme : mais il serait curieux de chercher si le premier cas n'aurait pas lieu lorsque ces substances sont cristallisées ; on pourrait s'en assurer par l'expérience, soit en approchant un cristal d'une aiguille aimantée librement suspendue, soit en faisant osciller de petites aiguilles taillées dans des cristaux en toute sorte de sens et soumises à l'action d'un très-fort aimant.

Telles sont toutes les circonstances physiques ou les diverses données de la question à laquelle nous nous sommes proposé, dans ce Mémoire, d'appliquer l'analyse mathématique, et que nous croyons avoir présentée sous le point de vue le plus général et le plus conforme à la nature.

Le principal problème que nous avons eu à résoudre, a été de déterminer en grandeur et en direction la résultante des attractions ou répulsions exercées par tous les élémens magnétiques d'un corps aimanté, de forme quelconque, sur un point pris en dehors ou dans son intérieur. En ajoutant aux composantes de cette force relatives à un point intérieur celles des forces extérieures qui influent sur ce corps, on aura les forces totales qui tendent à séparer les deux fluides réunis en ce point. Or, si la matière du corps n'oppose aucune résistance sensible au déplacement de ces deux fluides dans

chaque élément magnétique, ou, autrement dit, si la force coercitive est nulle, il sera nécessaire, pour l'équilibre magnétique, que ces forces totales soient égales à zéro, sans quoi elles produiraient une nouvelle décomposition du fluide neutre, qui n'est jamais épuisé, comme on l'a dit plus haut, et l'état magnétique du corps serait changé. Si, au contraire, la force coercitive n'était pas nulle dans le corps que l'on considère, il suffirait alors que la résultante de toutes les forces extérieures et intérieures qui agissent en un point quelconque de ce corps, ne surpassât nulle part la grandeur donnée de la force coercitive, dont l'effet serait analogue à celui du frottement dans les machines. Il en résulte que, dans ce cas, l'équilibre magnétique pourra subsister d'une infinité de manières différentes. Mais, parmi tous ces états d'équilibre possibles, il existe un état remarquable dans lequel les physiciens disent que les corps sont *aimantés à saturation*, et dont nous pourrons nous occuper dans un autre Mémoire : nous nous sommes bornés, dans celui-ci, à considérer l'état unique et déterminé des corps aimantés par influence, pour lesquels la force coercitive est supposée nulle.

Les deux fluides boréal et austral que l'aimantation a séparés, n'étant retenus par aucune force dans l'intérieur des élémens magnétiques, se transporteront à leurs surfaces, où ils seront arrêtés par la cause quelconque qui les empêche de pénétrer dans les espaces compris entre ces élémens. Ils y formeront une couche très-mince par rapport même aux dimensions de ces élémens : cela résulte, en effet, de ce que nous regardons le fluide neutre contenu dans chaque élément comme inépuisable ; ce qui exige que la partie qui en est décomposée soit toujours très-petite relativement à la totalité de ce fluide. Toutefois, cette concentration à la surface des élémens, de la petite portion de fluide décomposée dans leur intérieur, n'aurait pas lieu si le fluide magnétique était de la

nature des fluides élastiques, c'est-à-dire, si les particules, outre leurs attractions ou répulsions mutuelles en raison inverse du carré des distances, étaient encore soumises à ce genre de forces, provenant de la chaleur ou de toute autre cause, qui ne sont sensibles qu'à des distances insensibles et qui produisent l'élasticité; mais nous supposerons que ces dernières forces n'existent pas, ou qu'elles sont insensibles par rapport aux premières. Cette remarque s'applique également au fluide électrique : si ce fluide impondérable était élastique, il se dilaterait dans l'intérieur des corps conducteurs de l'électricité, au lieu de former une couche très-mince à leurs surfaces; et, dans cette hypothèse, les phénomènes que ces corps devraient présenter cesseraient de s'accorder avec ceux qu'on observe.

Ce Mémoire est divisé en trois paragraphes. Le premier contient les expressions générales des attractions ou répulsions exercées par un corps de forme quelconque, aimanté par influence, sur un point donné de position. Ces forces sont exprimées par des intégrales triples; mais, après différentes transformations, on parvient, dans le second paragraphe, à les réduire à des intégrales doubles, dans le cas où le corps est homogène et a par-tout la même température. Il résulte de ces formules ainsi réduites, que les actions magnétiques d'un corps de forme quelconque sont équivalentes à celles d'une couche de fluide d'une très-petite épaisseur qui recouvrirait la surface entière, quoique cependant les deux fluides agissans soient répandus dans toute la masse de ce corps. Le troisième paragraphe contient l'application des formules générales au cas des corps sphériques. Dans ce cas, les équations de l'équilibre magnétique peuvent être résolues complétement, et les formules qui expriment les actions magnétiques de ces corps, sont immédiatement comparables aux résultats des observations. C'est pourquoi j'ai développé ces formules avec

beaucoup de détails, afin de faciliter la vérification de la théorie par l'expérience. On trouvera à la fin du Mémoire un essai de cette vérification, qui montre déjà la vérité de la théorie en général, mais qui laisse encore quelque chose à desirer sous le rapport de l'accord plus ou moins parfait des nombres donnés par le calcul ou par l'observation. Si l'on avait un amas de parcelles métalliques ou de toute autre matière, conductrices de l'électricité, mêlées en proportion donnée à des matières non conductrices, et qu'on soumît cet assemblage à l'influence d'un ou de plusieurs corps électrisés, les formules de mon Mémoire s'appliqueraient également à ce cas, qui n'avait pas encore été considéré, et elles feraient connaître en grandeur et en direction les actions électriques exercées par ce mélange; ce qui pourra encore être vérifié par des observations directes.

Dans un second Mémoire, nous essaierons de déterminer, d'après les principes et les formules contenues dans celui-ci, la distribution du magnétisme dans les aiguilles d'acier aimantées à saturation et dans les aiguilles de fer doux aimantées par influence, d'où nous déduirons ensuite les lois de leurs attractions ou répulsions mutuelles.

§. I.er

Expressions générales des Attractions ou Répulsions exercées par un Corps aimanté par influence.

(1) Considérons un corps aimanté par influence, de forme et de dimensions quelconques, dans lequel la force *coercitive* soit nulle, et que nous appellerons *A*, pour abréger.

D'après ce qui précède, nous regarderons ce corps comme un assemblage d'*élémens magnétiques*, séparés les uns des autres par des intervalles inaccessibles au magnétisme; et voici, par

rapport à ces élémens, les diverses suppositions résultant de la discussion dans laquelle nous venons d'entrer, qui serviront de base à nos calculs.

1.° Les dimensions des élémens magnétiques, et celles des espaces qui les isolent, sont insensibles, et pourront être traitées comme des infiniment petits, relativement aux dimensions du corps A.

2.° La matière de ce corps n'oppose aucun obstacle à la séparation des deux fluides *boréal* et *austral*, dans l'intérieur des élémens magnétiques.

3.° Les portions des deux fluides que l'aimantation sépare dans un élément quelconque, sont toujours très-petites, eu égard à la totalité du fluide *neutre* que cet élément renferme, et ce fluide neutre n'est jamais épuisé.

4.° Ces portions de fluide, ainsi séparées, se transportent à la surface de l'élément magnétique, où elles forment une couche dont l'épaisseur, variable d'un point à un autre, est par-tout très-petite, et pourra aussi être considérée comme infiniment petite, même en la comparant aux dimensions de cet élément.

Ces principes étant posés, nous allons d'abord déterminer l'action d'un élément quelconque sur un point donné de position, en dehors ou en dedans du corps A.

(2) Appelons M ce point; soient x, y, z, ses trois coordonnées rectangulaires; prenons dans l'intérieur de l'élément magnétique que nous voulons considérer, un point fixe C auquel nous rapporterons, comme origine, les coordonnées des points de la surface; désignons par x', y', z', les coordonnées du point C, rapportées aux mêmes axes que celles du point M, et par ρ la distance mutuelle de ces deux points, en sorte qu'on ait

$$\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Désignons aussi par h le côté d'un cube équivalent en volume à l'élément magnétique. Soit M' un point quelconque de sa surface : représentons par $h\chi$, $h\xi$, $h\zeta$, ses trois coordonnées rapportées à des axes menés par le point C, et parallèles à ceux des x', y', z'; et par $\rho_{,}$ sa distance au point M, dont la valeur se déduira de celle de ρ, en y augmentant x', y', z', de $h\chi$, $h\xi$, $h\zeta$. Soit ε l'épaisseur de la couche magnétique au point M', évaluée dans le sens de la normale à la surface; appelons $h^2 ds$ l'élément différentiel de cette surface au même point : le produit $h^2 \varepsilon ds$ sera l'élément de volume de la couche magnétique en ce point M'.

Nous appellerons fluide *libre* en un point quelconque, l'excès du fluide boréal sur le fluide austral qui s'y trouve : ce fluide sera nul dans l'intérieur de l'élément magnétique, positif en différentes parties de sa surface, et négatif dans les autres parties. Représentons par $\mu h^2 \varepsilon ds$ la quantité de ce fluide contenue dans l'élément $h^2 \varepsilon ds$, de sorte que le coefficient μ soit une quantité positive ou négative, qui exprime le fluide libre que renfermerait l'unité de volume, dont tous les élémens seraient dans le même état que $h^2 \varepsilon ds$. Puisque les deux fluides boréal et austral sont en quantités égales dans la totalité de la couche mince qui termine chaque élément magnétique, il s'ensuit que l'intégrale de $\mu h^2 \varepsilon ds$, étendue à la surface entière d'un élément, devra être égale à zéro. Ainsi, en supprimant le facteur constant h^2, nous aurons l'équation

$$\int \mu \varepsilon ds = 0. \qquad (1)$$

A cause de la petitesse supposée de ε par rapport à h, on pourra, dans le calcul de l'action exercée sur le point M par l'élément magnétique que nous considérons, traiter ε comme un infiniment petit, lors même que l'on aura égard aux dimensions de cet élément. D'après cela, l'action de $\mu h^2 \varepsilon ds$ sur une particule magnétique située en M sera exprimée

par

$$\frac{\mu h^2 \varepsilon ds}{\rho_{\prime}^{2}};$$

en prenant pour unité de force l'intensité du pouvoir magnétique, agissant sous l'unité de volume et à l'unité de distance. Pour fixer les idées, nous supposerons que cette particule soit australe, et alors la force dirigée suivant MM' sera attractive ou répulsive, selon que son expression sera positive ou négative. Ses trois composantes parallèles aux axes des x, y, z, pourront, comme on sait, s'exprimer par

$$\frac{d\frac{1}{\rho_{\prime}}}{dx}\,\mu h^2 \varepsilon ds, \quad \frac{d\frac{1}{\rho_{\prime}}}{dy}\,\mu h^2 \varepsilon ds, \quad \frac{d\frac{1}{\rho_{\prime}}}{dz}\,\mu h^2 \varepsilon ds.$$

Elles tendront à augmenter ou à diminuer les coordonnées du point M, selon qu'elles seront positives ou négatives; l'inverse aurait lieu si la particule située en ce point était boréale.

Il ne s'agira que d'intégrer ces trois expressions, et d'étendre les intégrales à la surface entière de l'élément magnétique, pour connaître, en grandeur et en direction, son action totale sur le point M.

(3) Pour cela, développons la quantité $\frac{1}{\rho_{\prime}}$ suivant les puissances de h. Cette série sera, en général, très-convergente; il n'y aura d'exception que dans le cas particulier dont il sera question plus bas, où la distance du point M à l'élément magnétique sera du même ordre de petitesse que les dimensions de cet élément. Mais, dès que cette distance aura une grandeur sensible, nous pourrons négliger, dans le développement de $\frac{1}{\rho_{\prime}}$, tous les termes qui contiennent des puissances de h supérieures à la première, d'où il résultera sim-

plement

$$\frac{1}{\rho_{,}} = \frac{1}{\rho} + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dx'}h\chi + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dy'}h\xi + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dz'}h\zeta.$$

Si l'on substitue cette valeur dans les formules précédentes, le premier terme disparaîtra dans leurs intégrales, en vertu de l'équation (1); faisant ensuite

$$\int \chi\mu\varepsilon ds = \alpha', \int \xi\mu\varepsilon ds = \beta', \int \zeta\mu\varepsilon ds = \gamma',$$

et pour abréger,

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx'}\alpha' + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dy'}\beta' + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dz'}\gamma' = q;$$

désignant enfin par $\lambda, \lambda', \lambda''$, les trois composantes de la force cherchée, respectivement parallèles aux axes des x, y, z, on aura

$$\lambda = h^3\frac{dq}{dx}, \quad \lambda' = h^3\frac{dq}{dy}, \quad \lambda'' = h^3\frac{dq}{dz}. \qquad (2)$$

On voit par-là que ces trois composantes ne dépendent point de la forme de l'élément magnétique, ni de la distribution du fluide libre à sa surface; elles dépendent des trois quantités α', β', γ', qui varient avec la position de l'élément dans l'intérieur de A, et dont nous aurons à déterminer les valeurs en fonctions des coordonnées x', y', z', d'après la forme de ce corps, et les forces extérieures qui agissent sur ses deux fluides. Il n'en serait pas de même si le point M était très rapproché de l'élément magnétique; l'action de cet élément dépendrait alors de sa forme et de la distribution du fluide libre à sa surfacce, de telle sorte qu'on ne pourrait la connaître qu'en faisant une hypothèse sur cette forme, et après avoir déterminé, en conséquence, la loi des épaisseurs du fluide libre à la surface. Mais heureusement nous n'aurons pas besoin de considérer l'action des élémens magnétiques

sur les points circonvoisins qui en sont à une distance comparable à leurs dimensions.

(4) Les intégrales que α', β', γ', représentent, ne varient pas quand la position du point C change dans l'intérieur de l'élément magnétique; car alors chacune des trois coordonnées χ, ξ, ζ, augmente ou diminue d'une quantité constante, et la variation correspondante de chacune des quantités α', β', γ', est nulle en vertu de l'équation (1). Ces intégrales changent de valeurs quand on change la direction des axes des coordonnées; et si l'on appelle α'', β'', γ'', leurs valeurs relatives à trois nouveaux axes rectangulaires, on aura, d'après les formules de la transformation des coordonnées,

$$\alpha' = \alpha'' \cos a + \beta'' \cos a' + \gamma'' \cos a'',$$
$$\beta' = \alpha'' \cos b + \beta'' \cos b' + \gamma'' \cos b'',$$
$$\gamma' = \alpha'' \cos c + \beta'' \cos c' + \gamma'' \cos c'';$$

a, b, &c., étant les angles que les nouveaux axes font avec les anciens. Par suite des relations connues qui existent entre les cosinus de ces angles, on aura

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2.$$

De plus, il sera facile de déterminer les directions des nouveaux axes, de manière que deux des trois quantités α'', β'', γ'', les deux dernières, par exemple, soient égales à zéro; posant en outre,

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \delta^2, \qquad (3)$$

on aura $\alpha'' = \delta$, et

$$\alpha' = \delta \cos a, \ \beta' = \delta \cos b, \ \gamma' = \delta \cos c. \qquad (4)$$

Les angles a, b, c, seront ceux que fait l'axe particulier qui répond à cette quantité δ, avec les axes menés par le point C, suivant les directions des x', y', z', positives. Appelons i l'angle compris entre la droite CM, et cet axe; l, l', l'',

les angles que fait cette même droite avec les directions des x', y', z', angles qui pourront s'étendre ainsi que a, b, c, depuis zéro jusqu'à la demi-circonférence : on aura, d'après une formule connue,

$$\cos i = \cos a \cos l + \cos b \cos l' + \cos c \cos l''.$$

On aura aussi

$$\frac{x-x'}{\rho} = \cos l, \quad \frac{y-y'}{\rho} = \cos l', \quad \frac{z-z'}{\rho} = \cos l'';$$

et, au moyen de ces diverses valeurs, celles de λ, λ', λ'', deviendront

$$\lambda = -\frac{h^3 \delta}{\rho^3}(3 \cos i \cos l - \cos a),$$

$$\lambda' = -\frac{h^3 \delta}{\rho^3}(3 \cos i \cos l' - \cos b),$$

$$\lambda'' = -\frac{h^3 \delta}{\rho^3}(3 \cos i \cos l'' - \cos c);$$

d'où l'on conclut pour la résultante de ces trois forces :

$$\frac{h^3 \delta}{\rho^3} \sqrt{3 \cos^2 i + 1},$$

abstraction faite du signe. Elle atteindra son *maximum* et sera égale à $\frac{2 h^3 \delta}{\rho^3}$, quand le point M sera situé sur l'axe qui répond aux angles a, b, c. Sa direction coïncidera alors avec cet axe, et, dans tous les cas, elle sera comprise dans le plan de ce même axe et de la droite CM.

Cette action d'un élément magnétique sur un point M qui en est à une distance sensible, est équivalente à celle d'une petite aiguille aimantée dont la direction serait déterminée par les angles a, b, c, et qui contiendrait, à chacun de ses pôles, une quantité convenable de fluide libre : $2h$ étant sa longueur, et son milieu répondant au point C, cette quantité de fluide devra être égale à $\frac{1}{2} h^2 \delta$. La direction de cette petite aiguille indiquera le sens de l'aimantation du corps A,

au point M; et si l'on concevait dans son intérieur une suite de lignes tangentes en chaque point à la petite aiguille correspondante, chacune de ces courbes pourrait s'appeler une *ligne d'aimantation*. Les deux équations différentielles du premier ordre, de ce système de lignes à double courbure, se formeront immédiatement, quand on connaîtra les valeurs de α', β', γ', en fonctions de x', y', z'.

L'équation (3) donnera pour δ deux valeurs égales et de signes contraires; la valeur positive répondra au pôle boréal de la petite aiguille, et la valeur négative, à son pôle austral; pour chacune de ses deux valeurs, les équations (4) détermineront sans ambiguité la direction de la droite menée du point C au pôle correspondant.

(5) Concevons autour de ce point C un volume v dont les dimensions soient très-grandes, et comme infinies par rapport à celles des élémens magnétiques, et qu'on puisse cependant regarder comme très-petites relativement aux dimensions du corps A. Désignons par k' la somme des volumes des élémens magnétiques contenus dans v, divisée par ce volume. Ce rapport k' ne pourra jamais surpasser l'unité. Si A est homogène, et si sa température est par-tout la même, la fraction k' sera aussi la même dans toute l'étendue de A; mais elle devra être donnée en particulier pour chaque substance susceptible d'aimantation, et pour chaque température. Pour plus de généralité, nous considérerons k' comme une fonction donnée des coordonnées x', y', z', du point C; ce qui comprendra le cas où la température de A variera d'un point à un autre.

Il est important d'observer que, quoique le volume v soit supposé très-petit, les quantités α', β', γ', n'auront pas les mêmes valeurs dans toute son étendue, si les élémens magnétiques qu'il renferme n'ont pas tous la même forme, ou

s'ils ne sont pas régulièrement disposés; mais, dans tous les cas, les composantes de l'action exercée par cette petite portion de A sur un point M qui en est très-éloigné, seront exprimées par les valeurs de λ, λ', λ'', en y remplaçant le volume h^3 d'un élément magnétique par la somme $v\,k'$ de tous les élémens contenus dans v, et prenant pour α', β', γ', les moyennes de leurs valeurs relatives à tous ces élémens. On devra supposer que ces moyennes sont soumises à la loi de continuité, et qu'elles peuvent s'exprimer par des fonctions des coordonnées x', y', z', du point C, sans quoi l'analyse mathématique ne saurait s'appliquer à la question qui nous occupe.

La résultante de ces forces λ, λ', λ'', à l'unité de distance, et dans le sens de son *maximum*, sera égale à $2\,v\,k'\,\delta$; le coefficient $2\,k'\,\delta$, par lequel le volume v est multiplié dans cette expression, pourra servir de mesure à l'intensité du magnétisme de A au point C : cette intensité et le sens de l'aimantation dans les différens points de ce corps, sont tout ce qu'on peut connaître de la *distribution* du magnétisme dans son intérieur; mais ce qu'il importe bien plutôt de déterminer, ce sont les attractions ou répulsions que le corps A exerce sur un point M donné de position.

(6) Supposons d'abord que ce point, dont les coordonnées seront toujours x, y, z, soit situé en dehors de A; partageons le volume de ce corps en un grand nombre de petits volumes, tels que v, égaux ou inégaux : l'action de chacun de ces volumes sur le point M étant connue en grandeur et en direction, d'après le numéro précédent, il suffira de prendre la somme des actions de tous les volumes, décomposées suivant un même axe, pour avoir l'action totale de A suivant cet axe; or cette sommation de quantités finies pourra être remplacée par une

intégrale définie. En effet, si $v f(x', y', z')$ représente le terme général des quantités que l'on veut sommer, x', y', z' étant les coordonnées de l'un des points du volume v, et si cette somme doit être étendue à toutes les parties dans lesquelles on a divisé un volume déterminé V, on sait, par les principes du calcul intégral, que cette somme sera à très-peu près égale à l'intégrale triple $\int\int\int (x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'$, étendue au volume entier V. La différence entre la somme et l'intégrale est d'autant moindre que les volumes partiels sont plus petits par rapport au volume entier; et, dans le cas actuel, on peut la négliger sans craindre qu'il en résulte une erreur appréciable.

D'après cela, si nous appelons X, Y, Z, les trois composantes suivant les axes des x, y, z, de l'action du corps A sur le point M, nous aurons leurs valeurs, en substituant d'abord $k'\, dx'\, dy'\, dz'$ à h^3 dans les seconds membres des équations (2), et les intégrant ensuite dans toute l'étendue de A; ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned} X &= \int\int\int \frac{dq}{dx}\, k'\, dx'\, dy'\, dz', \\ Y &= \int\int\int \frac{dq}{dy}\, k'\, dx'\, dy'\, dz', \\ Z &= \int\int\int \frac{dq}{dz}\, k'\, dx'\, dy'\, dz'. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

On se souviendra que, la particule magnétique située au point M étant supposée australe, ces forces tendront à augmenter ou diminuer ses coordonnées x, y, z, selon que les valeurs de X, Y, Z, seront positives ou négatives.

(7) Lorsque le point M, sur lequel agit le corps A, sera situé dans son intérieur, il faudra déterminer d'une manière particulière l'action de l'élément magnétique dont M fait partie, et celle des autres élémens qui en sont très-voisins; car les formules précédentes ne conviennent pas au cas dont

nous parlons, puisqu'elles supposent les distances des élémens au point M très-grandes par rapport à leurs dimensions. Nous rangerons donc les élémens magnétiques en deux classes : ceux qui sont à une distance sensible du point M, et ceux, au contraire, qui en sont très-rapprochés. Relativement aux premiers, les valeurs de X, Y, Z, données par les équations (5), exprimeront toujours les composantes totales de leur action sur le point M, en ne comprenant pas dans les intégrales triples les points de A contenus dans une très-petite étendue autour de M, c'est-à-dire, dans une étendue dont les dimensions, quoique très-grandes par rapport à celles des élémens magnétiques, seront néanmoins insensibles par rapport aux dimensions de A. Quant aux autres élémens magnétiques, ils seront circonscrits dans une semblable étendue autour de M, et nous déterminerons l'action de cette portion de A sur ce point intérieur, en nous fondant sur la proposition suivante.

Menons par le point M une droite CMC', dont les deux parties MC et MC' soient égales entre elles, et d'une grandeur telle, qu'on puisse les considérer à-la-fois comme infiniment petites en les comparant aux dimensions de A, et comme infinies relativement aux dimensions des élémens magnétiques et des espaces qui les séparent les uns des autres. La proposition dont nous avons besoin consiste en ce que si les deux extrémités C et C' de cette droite tombent l'une et l'autre hors d'un élément magnétique, la somme des particules de fluide libre devra être considérée comme égale sur ses deux parties MC et MC', en n'y comprenant pas le fluide libre appartenant à l'élément magnétique dont le point M fait partie.

En effet, tous les élémens traversés par la droite CMC' seront sensiblement dans le même état magnétique, puisque la longueur de cette droite est insensible, eu égard aux dimensions de A; de plus, abstraction faite de l'élément dont

le point M fait partie, la droite CM, en allant de C vers M, et la droite MC', en allant de M vers C', rencontreront, en général, un même nombre de fois les surfaces des élémens magnétiques, en pénétrant dans leur intérieur ; elles rencontreront aussi ces surfaces le même nombre de fois, en sortant des élémens. A la vérité, ces points de rencontre ne seront pas semblablement situés sur toutes les surfaces ; mais, leur nombre étant très-grand et comme infini, les mêmes circonstances devront toutes se présenter des deux côtés du point M, et alors il n'y aura pas de raison de supposer la quantité de fluide libre plus grande d'un côté que de l'autre.

(8) Cela posé, appelons, pour abréger, B la petite portion de A dont nous voulons déterminer l'action sur le point M, et, pour cette détermination, décomposons B en une infinité de cônes infiniment aigus, dont les sommets soient en ce point M. Comme l'autre partie de A, dont l'action sur M a pour composantes les forces X, Y, Z, se compose d'élémens magnétiques qui sont tous complets, il sera nécessaire que B se compose de même d'élémens entiers ; d'où il résulte que l'axe de chacun de ces cônes devra se terminer hors d'un élément magnétique.

Soit ω l'aire infiniment petite de la section faite dans l'un de ces cônes, perpendiculairement à son axe et à l'unité de distance du sommet M ; désignons par r la distance d'un point quelconque de cet axe au point M ; l'élément de volume du cône, à cette distance r, sera $r^2 \omega dr$; et, si l'on appelle μ la quantité de fluide libre qui répond au même point, l'action de cet élément sur le sommet, dirigée suivant l'axe du cône, sera exprimée par $\mu \omega dr$. L'action du cône entier aura la même direction, et pour valeur $\omega \int \mu dr$; l'intégrale étant prise dans toute la longueur de son axe, et exprimant évidemment la quantité de fluide libre qui se trouve sur cette

droite. L'action du cône dont l'axe est le prolongement de celui-ci, sera dirigée en sens contraire; ces deux forces opposées se détruiront en partie; et si l'on suppose, ce qui est permis, les deux cônes d'égale longueur, et de même ouverture ω, ces deux forces se réduiront, en vertu de la proposition précédente, à la seule action du fluide libre, appartenant à-la-fois à l'un des cônes et à l'élément magnétique dont le point M fait partie. Il en sera de même à l'égard de tous les cônes considérés deux à deux, en sorte que l'action totale de B sur le point M sera réduite à celle de la couche magnétique qui occupe la surface de ce même élément. On voit aussi par ce raisonnement que si le point M était situé hors d'un élément magnétique, l'action de B sur ce point se détruirait complétement, c'est-à-dire qu'une particule de fluide boréal ou austral qu'on y placerait, y demeurerait en équilibre, si elle n'était soumise qu'à cette seule action.

Ces conclusions sont indépendantes de la forme de B : elles exigent seulement que cette portion de A ne contienne que des élémens magnétiques complets, et que les rayons menés du point M à sa surface soient tous très-grands par rapport aux dimensions des élémens, et néanmoins insensibles relativement aux dimensions de A ; et en effet, pourvu que ces conditions soient toujours remplies, on pourra augmenter ou diminuer B sans altérer sensiblement son action sur le point M : l'action des élémens entiers que l'on ajoutera ou que l'on retranchera de cette manière, se calculera par la méthode du n.° 6; mais, vu la petite étendue dans laquelle ces élémens seront circonscrits, les intégrales triples qui s'y rapporteront, pourront être négligées par rapport aux forces X, Y, Z, auxquelles doivent être ajoutées les composantes de l'action B. Mais la condition relative à la distance de M aux points extrêmes de B ne sera pas remplie tout autour du point M, quand il sera situé à la surface de A, ou extrêmement près de

cette surface. L'action totale de ce corps sur les points très-voisins de sa superficie dépendrait, en chaque point, de la disposition paticulière des élémens magnétiques autour de ce point : c'est pourquoi nous ne chercherons pas à la déterminer ; et il nous suffira de prévenir que tout ce qui va suivre n'est applicable qu'aux points de A, dont la distance à sa surface est très-grande par rapport aux dimensions des élémens; ce qui aura lieu, au reste, dès que ces points seront situés à une profondeur appréciable.

(9) L'action d'un élément magnétique sur un point M de son intérieur, à laquelle se réduit l'action de B, est facile à déterminer. En effet, menons par le point M trois axes rectangulaires que nous supposerons, par exemple, parallèles aux axes des x, y, z, et dirigés dans le sens des coordonnées positives ; soit θ l'angle compris entre l'axe des x et un rayon quelconque mené du point M à la surface de l'élément : désignons par ψ, l'angle compris entre le plan de ces deux droites et le plan des x, z; par e, l'épaisseur de la couche magnétique à l'extrémité de ce rayon r, évalué suivant sa direction ; par μ, la mesure du fluide libre au même point : l'action exercée sur le point M dans cette direction sera exprimée par $\mu e \sin\theta\, d\theta\, d\psi$; ce qui n'est autre chose que la valeur de la quantité $\omega\, \mu\, d\, r$ du numéro précédent, en prenant l'intégrale depuis l'entrée du rayon r dans la couche de fluide libre jusqu'à sa sortie, et mettant pour ω l'élément $\sin\theta\, d\theta\, d\psi$ de la surface sphérique qui a l'unité pour rayon. Les composantes de cette force, suivant les axes des x, y, z, s'en déduiront en multipliant son expression par $\cos\theta$, $\sin\theta \sin\psi$, $\sin\theta \cos\psi$, qui sont les cosinus des angles que sa direction fait avec ces trois axes. En intégrant ensuite ces produits par rapport à θ et à ψ, on en conclura les composantes de l'action exercée sur le point M par l'élément magnétique auquel il appartient. Si

donc on appelle $\alpha_{\prime}$, $\beta_{\prime}$, $\gamma_{\prime}$, ces composantes suivant les x, y, z, on aura

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\prime} &= \iint \mu\, e \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\psi, \\ \beta_{\prime} &= \iint \mu\, e \sin^2\theta \sin\psi\, d\theta\, d\psi, \\ \gamma_{\prime} &= \iint \mu\, e \sin^2\theta \cos\psi\, d\theta\, d\psi; \end{aligned}\right\} (6)$$

les intégrales étant étendues à la surface entière de l'élément, ce qui exigera qu'on les prenne depuis $\theta = 0$ et $\psi = 0$, jusqu'à $\theta = \pi$ et $\psi = 2\pi$, et ne pourra s'effectuer que quand le produit $\mu\, e$ sera donné en fonction de θ et ψ : la quantité π représente ici, et dans tout ce Mémoire, le rapport de la circonférence au diamètre.

Selon que ces forces seront positives ou négatives, elles tendront à augmenter ou à diminuer les coordonnées d'une particule australe située au point M; elles agiront en ce point dans le même sens que les autres forces X, Y, Z; par conséquent, les composantes de l'action totale de A sur un point déterminé M seront exprimées par

$$X + \alpha_{\prime},\quad Y + \beta_{\prime},\quad Z + \gamma_{\prime}.$$

Ces valeurs subsisteront encore lorsque le point M sera situé à la surface intérieure de la couche de fluide libre qui termine l'élément auquel il appartient; leur expression changerait s'il faisait partie de cette couche : mais les forces qui agissent sur le fluide libre dont elle est composée, sont détruites par l'obstacle quelconque qui s'oppose à sa sortie de l'élément magnétique; ce qui rend leurs composantes inutiles à connaître. Nous observerons seulement que, l'action de B sur les points placés en dehors des élémens magnétiques étant nulle d'après le numéro précédent, les composantes de l'action totale de A sur les particules situées à leurs surfaces extérieures se réduiront aux seules forces X, Y, Z.

(10) Nous pouvons maintenant former les équations d'équi-

libre des deux fluides magnétiques contenus dans le corps A, que nous venons de considérer. Pour cela, supposons que d'autres corps aimantés, en nombre et de forme quelconques, agissent sur ces deux fluides. Soit V, la somme des particules de fluide libre qu'ils renferment, divisées respectivement par leurs distances au point M du premier corps, dont les coordonnées sont x, y, z, lequel point est situé dans l'intérieur d'un élément magnétique et ne fait pas partie de la couche de fluide libre qui termine cet élément. Les composantes de l'action de toutes ces particules sur le point M, parallèles aux axes des x, y, z, et dirigées dans le même sens que les forces précédentes, seront exprimées, comme on sait, par les trois différences partielles :

$$\frac{dV}{dx},\ \frac{dV}{dy},\ \frac{dV}{dz}.$$

En les ajoutant aux forces du numéro précédent, on aura les composantes rectangulaires de toutes les forces appliquées au point M, et qui proviennent soit du corps A dont il fait partie, soit des autres corps aimantés. Or, la matière de A n'apportant aucune résistance au déplacement des deux fluides dans l'intérieur de chaque élément, il sera nécessaire, comme nous l'avons dit dans le préambule de ce Mémoire, que ces composantes totales soient nulles, sans quoi elles produiraient une nouvelle décomposition du fluide neutre qui se trouve en M et qui n'est jamais épuisé ; décomposition qui troublerait l'équilibre des deux fluides et changerait l'état magnétique de A. Lors donc que ce corps sera parvenu à un état permanent, nous aurons ces trois équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dx} + X + \alpha_{,} &= 0, \\ \frac{dV}{dy} + Y + \beta_{,} &= 0, \\ \frac{dV}{dz} + Z + \gamma_{,} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Elles contiennent six inconnues, savoir : $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, et les quantités α', β', γ', qui entrent dans les expressions de X, Y, Z; elles ne suffiraient donc pas pour les déterminer : mais ces six inconnues se réduisent à trois, d'après les relations qui existent entre elles et qui dépendent de la forme des élémens, sur laquelle nous n'avons fait jusqu'ici aucune hypothèse. En vertu de ces relations, la forme des élémens et leurs positions par rapport aux plans fixes des coordonnées x, y, z, peuvent influer sur l'état magnétique de A et sur les attractions ou répulsions qu'il exerce au-dehors. Il pourrait même arriver que cette influence ne fût pas la même en tout sens, en sorte que, si A était une sphère homogène, et qu'on fît tourner ce corps sans déplacer son centre et sans rien changer aux forces extérieures ou à la fonction V, les actions magnétiques de A changeraient néanmoins en grandeur et en direction. Ce cas singulier, que nous avons déjà indiqué dans le préambule de ce Mémoire, ne s'étant pas encore présenté à l'observation, nous l'exclurons de nos recherches, quant à présent, et nous allons, en conséquence, déterminer les relations qui doivent exister entre α', β', γ', et les quantités $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, pour qu'il n'ait pas lieu.

(11) Supposons que ces six quantités appartiennent à un même élément magnétique, et désignons par α, β, γ, ce que deviennent les trois premières, quand les coordonnées d'un point quelconque pris dans cet élément sont x, y, z, au lieu d'être x', y', z', comme dans le n.° 2. Il est aisé de voir que les relations qui lieront entre elles ces six quantités, seront exprimées par des équations linéaires de la forme :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= P\,\alpha_{,} + Q\,\beta_{,} + R\,\gamma_{,}, \\ \beta &= P'\,\alpha_{,} + Q'\,\beta_{,} + R'\,\gamma_{,}, \\ \gamma &= P''\,\alpha_{,} + Q''\,\beta_{,} + R''\,\gamma_{,}, \end{aligned}\right\}\quad(8)$$

dans lesquelles les neuf coefficiens P, Q, &c., dépendront, en général, de la forme de l'élément magnétique et de sa position par rapport aux plans fixes des x, y, z.

Si l'on divise le corps A en un très-grand nombre de petites parties, et s'il arrive que les élémens appartenant à l'une de ces parties n'aient pas tous la même forme et des positions semblables, les quantités P, Q, &c., auront des valeurs différentes pour ces différens élémens. Au contraire, les quantités $\alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}$ seront à très-peu près constantes dans toute l'étendue de chaque partie de A, puisque leurs valeurs doivent satisfaire aux équations (7), dont les deux premiers termes ne varieront pas sensiblement pour tous les points compris dans cette petite étendue. Les quantités α, β, γ, ne varieront donc, dans cette même étendue, qu'à raison des quantités P, Q, &c. : mais les valeurs de ces trois fonctions, dont on doit faire usage dans le calcul des forces X, Y, Z, sont les moyennes de leurs valeurs relatives à un très-grand nombre d'élémens voisins (n.° 5); ce sont donc aussi les moyennes des valeurs de P, Q, &c., dans chaque petite partie de A, qu'il faudra employer dans les équations précédentes. Ces moyennes dépendront de la matière du corps A : s'il est homogène, elles seront les mêmes dans toute son étendue ; s'il est hétérogène, elles varieront d'un point à un autre, suivant des lois résultant de la constitution de ce corps : elles ne dépendront ni de sa forme, ni des forces auxquelles il est soumis; mais elles pourront dépendre, en général, de sa position par rapport aux plans fixes des x, y, z, et changer pour cette raison, lorsqu'on fera tourner A sur lui-même, quand bien même ce corps serait une sphère homogène.

Or, si nous voulons que l'action magnétique d'une sphère A ne change pas par l'effet de sa rotation, il sera nécessaire que les valeurs des fonctions α, β, γ, qu'on emploiera dans le calcul des forces X, Y, Z, soient indépendantes de ce

mouvement; cela étant, il en sera de même à l'égard des quantités $\alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}$, qui doivent satisfaire aux équations (7); donc aussi les coefficiens P, Q, &c., compris dans les équations (8), ne devront pas varier par l'effet de la rotation de A. C'est cette condition qu'il s'agit maintenant de remplir.

(12) Pour cela, observons que $\alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}$, étant les trois composantes parallèles aux axes des x, y, z, d'une certaine force, c'est-à-dire, de l'action d'un élément magnétique sur un point de son intérieur, les trois composantes de la même force suivant trois autres axes fixes dans cet élément, par exemple, suivant ses trois axes principaux de rotation, seront exprimées par

$$\begin{gathered} \alpha_{,} \cos l + \beta_{,} \cos m + \gamma_{,} \cos n, \\ \alpha_{,} \cos l' + \beta_{,} \cos m' + \gamma_{,} \cos n', \\ \alpha_{,} \cos l'' = \beta_{,} \cos m'' + \gamma_{,} \cos n''; \end{gathered}$$

en désignant par l, m, &c., les neuf angles compris entre les nouveaux axes et les anciens, dont les cosinus seront liés entre eux par ces équations connues :

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2 l + \cos^2 l' + \cos^2 l'' = 1, \\ &\cos^2 m + \cos^2 m' + \cos^2 m'' = 1, \\ &\cos^2 n + \cos^2 n' + \cos^2 n'' = 1, \\ &\cos l \cos m + \cos l' \cos m' + \cos l'' \cos m'' = 0, \\ &\cos l \cos n + \cos l' \cos n' + \cos l'' \cos n'' = 0, \\ &\cos m \cos n + \cos m' \cos n' + \cos m'' \cos n'' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Par la nature des quantités α, β, γ, leurs valeurs se composent aussi comme des forces, en passant d'un système d'axes rectangulaires à un autre (n.° 4); leurs valeurs relatives aux trois axes principaux seront par conséquent :

$$\alpha \cos l + \beta \cos m + \gamma \cos n,$$
$$\alpha \cos l' + \beta \cos m' + \gamma \cos n',$$
$$\alpha \cos l'' + \beta \cos m'' + \gamma \cos n'';$$

α, β, γ, se rapportant toujours aux axes quelconques des x, y, z.

Cela posé, concevons qu'en formant les équations (6) on ait décomposé l'action de l'élément magnétique suivant ses trois axes principaux, et remplaçons en conséquence, dans leurs premiers membres, les forces $\alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}$, par les expressions des composantes relatives à ces axes; la valeur de l'épaisseur e, que l'on déterminera ensuite d'après ces équations, sera de la forme :

$$\begin{aligned} e = P_{,} & (\alpha_{,} \cos l + \beta_{,} \cos m + \gamma_{,} \cos n) \\ + Q_{,} & (\alpha_{,} \cos l' + \beta_{,} \cos m' + \gamma_{,} \cos n') \\ + R_{,} & (\alpha_{,} \cos l'' + \beta_{,} \cos m'' + \gamma_{,} \cos n''); \end{aligned}$$

les coefficiens $P_{,}, Q_{,}, R_{,}$, ne dépendant plus que de la forme de l'élément, et nullement de sa position, ou des angles l, m, &c. L'épaisseur de la couche de fluide libre à la surface d'un élément magnétique étant ainsi exprimée, on pourra former les expressions correspondantes des intégrales que α, β, γ, représentent; et en rapportant aussi ces quantités aux trois axes principaux, c'est-à-dire, en les remplaçant par les trois trinomes qui précèdent la valeur de e, nous aurons

$$\begin{aligned} \alpha \cos l + \beta \cos m + \gamma \cos n = p & (\alpha_{,} \cos l + \beta_{,} \cos m + \gamma_{,} \cos n) \\ + q & (\alpha_{,} \cos l' + \beta_{,} \cos m' + \gamma_{,} \cos n') \\ + r & (\alpha_{,} \cos l'' + \beta_{,} \cos m'' + \gamma_{,} \cos n''), \\ \alpha \cos l' + \beta' \cos m' + \gamma \cos n' = p' & (\alpha_{,} \cos l + \beta_{,} \cos m + \gamma_{,} \cos n) \\ + q' & (\alpha_{,} \cos l' + \beta_{,} \cos m' + \gamma_{,} \cos n') \\ + r' & (\alpha_{,} \cos l'' + \beta_{,} \cos m'' + \gamma_{,} \cos n''), \\ \alpha \cos l'' + \beta' \cos m'' + \gamma \cos n'' = p'' & (\alpha_{,} \cos l + \beta_{,} \cos m + \gamma_{,} \cos n) \\ + q'' & (\alpha_{,} \cos l' + \beta_{,} \cos m' + \gamma_{,} \cos n') \\ + r'' & (\alpha_{,} \cos l'' + \beta_{,} \cos m'' + \gamma_{,} \cos n''); \end{aligned}$$

les neuf coefficiens p, q, &c., étant encore des quantités indépendantes des angles l, m, &c. En vertu des six équations (9), qui existent entre leurs cosinus, on tirera immédiatement de ces trois dernières équations les valeurs de α, β, γ, et les comparant aux seconds membres des équations (8), on en conclura celles des coefficiens P, Q, &c., dont il nous suffira d'écrire les deux premières, savoir:

$$\begin{aligned}P = & \; p\cos^2 l + q'\cos^2 l' + r''\cos^2 l'' \\ & + (p'+q)\cos l\cos l' + (p''+r)\cos l\cos l'' + (q''+r')\cos l'\cos l'', \\ Q = & \; p\cos l\cos m + q'\cos l'\cos m' + r''\cos l''\cos m'' \\ & + p'\cos l\cos m' + q\cos l'\cos m \\ & + p''\cos l\cos m'' + r\cos l''\cos m \\ & + q''\cos l'\cos m'' + r'\cos l''\cos m'.\end{aligned}$$

Lorsque la sphère A tournera sur elle-même, les angles l, m, &c., varieront, et l'on pourra leur attribuer toutes les valeurs possibles qui satisferont aux équations (9). Or, d'après le numéro précédent, les coefficiens P, Q, &c., devront tous rester les mêmes pendant la rotation de A; il faudra donc que les angles l, m, &c., disparaissent de leurs valeurs, en ayant toutefois égard aux équations (9) qui les lient entre eux. Cette condition sera remplie, si l'on a $p = q' = r''$, et si les six autres quantités p', p'', q, &c., sont nulles: on aura alors $P = Q' = R'' = p$, les six autres coefficiens P', P'', Q, &c., seront égaux à zéro, et les valeurs de α, β, γ, se réduiront à

$$\alpha = p\,\alpha_1, \quad \beta = p\,\beta_1, \quad \gamma = p\,\gamma_1. \qquad (10)$$

Je dis de plus que la condition donnée ne peut être remplie que de cette seule manière.

En effet, deux des trois angles l, l', l'', sont arbitraires; et pour qu'ils disparaissent de la valeur de P, il est nécessaire, et il suffit, d'après la première équation (9), qu'on ait

$$p = q' = r'', p' + q = 0, p'' + r = 0, q'' + r' = 0.$$

Ces conditions, jointes à la quatrième équation (9), réduisent la valeur de Q à

$$p'(\cos l \cos m' - \cos l' \cos m) + r(\cos l'' \cos m - \cos l \cos m'') + q''(\cos l' \cos m'' - \cos l'' \cos m');$$

et pour qu'elle soit indépendante des angles l, m, &c., il faudra qu'on ait $p' = 0$, $r = 0$, $q'' = 0$: cela, joint aux premières conditions, donnera $q = 0$, $p'' = 0$, $r' = 0$; ce qu'il fallait démontrer.

La valeur de p restera inconnue, et ne peut être déterminée par ces considérations. Quand on substituera, dans les expressions des forces X, Y, Z, du n.° 6, les valeurs des fonctions α, β, γ, données par les équations (10), cette quantité p se confondra avec le rapport k' de la somme des élémens magnétiques au volume dans lequel ils sont contenus, de manière que ces expressions ne seront fonctions que du produit $k'p$. Mais, comme ce rapport n'est pas connu *à priori*, et qu'il doit être déterminé par l'expérience, en comparant entre elles les actions magnétiques de A, calculées et observées, on conçoit que la connaissance de la valeur de p n'est pas indispensable : il arrivera seulement que la valeur qui sera donnée par l'expérience, sera celle du produit $k'p$, qui pourra surpasser l'unité au lieu d'être celle de k', qui était nécessairement moindre que un.

Pour confirmer, par un exemple, la forme des équations (10), nous allons examiner un cas très-étendu, dans lequel on pourra déterminer effectivement l'épaisseur variable de la couche de fluide libre à la surface de l'élément magnétique, et les valeurs des intégrales représentées par α, β, γ.

(13) Les valeurs des quantités $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, qui satisfont aux équations (7), étant sensiblement constantes pour tous

les points d'un même élément, il résulte des équations (6) que l'action de cet élément sur un point quelconque M compris dans son intérieur, sans faire partie de la couche de fluide libre située à sa surface, sera égale à une force constante en grandeur et en direction. Lorsque ces valeurs seront connues pour un élément déterminé, dont la forme sera donnée, la loi des épaisseurs de la couche de fluide libre sera aussi déterminée; le problème qu'on aura à résoudre pour la conclure de ces données, sera le même que pour déterminer la loi des épaisseurs de la couche électrique à la surface d'un corps conducteur, soumis à l'action d'une force constante pour tous ses points, en grandeur et en direction. Sa solution, telle qu'elle résulte de mon premier Mémoire sur cette matière (*), sera comprise dans la formule suivante.

Prenons arbitrairement un point fixe C dans l'intérieur de l'élément auquel le point M appartient; par ce point C menons trois axes parallèles à ceux des x, y, z; soient r le rayon vecteur du point M, ou sa distance au point C, u l'angle compris entre ce rayon et l'axe des x, et v l'angle compris entre le plan de ces deux droites et le plan des x, z; les trois variables r, u et v seront les coordonnées polaires du point M, rapportées au point C comme origine; ses trois coordonnées rectangulaires, rapportées à cette même origine, seraient $r \cos u$, $r \sin u \sin v$, $r \sin u \cos v$. Désignons par a le rayon d'une sphère équivalente en volume à l'élément que nous considérons; par u' et v' ce que deviennent les angles u et v, relativement à un point quelconque M' de la surface de cet élément; par $a(1+t)$ le rayon vecteur de M', en sorte que t soit une fonction donnée de u' et v'; et enfin par μ et e la mesure du fluide libre, et son épaisseur au point M', évaluée dans le sens du rayon CM'. L'équation qui servira à déterminer μ e

(*) *Mémoires de la première classe de l'Institut*, année 1811, I.re partie.

en fonctions de u' et v', sera celle-ci :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\iint \frac{\mu e a^2 (1+t)^2 \sin u'\, du'\, dv'}{[a^2(1+t)^2 - 2ra(1+t)(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v-v')) + r^2]^{\frac{1}{2}}} \\ = c + \alpha_{,} r \cos u + \beta_{,} r \sin u \sin v + \gamma_{,} r \sin u \cos v,\end{array}\right\} \quad (11)$$

qui devra subsister pour toutes les valeurs des trois variables r, u et v : la double intégrale est prise depuis $u' = 0$ et $v' = 0$, jusqu'à $u' = \pi$ et $v' = 2\pi$; et la quantité c est une constante qu'on déterminera d'après la condition que la totalité du fluide libre soit nulle, ou qu'on ait

$$\iint \mu e (1+t)^2 \sin u'\, du'\, dv' = 0.$$

En général, cette équation se résoudra par la méthode des séries. La valeur de μe s'exprimera par une série d'autant plus convergente que la quantité t sera plus petite : afin de ne pas nous jeter dans des calculs trop compliqués, nous supposerons que cette variable t soit constamment assez petite pour qu'on en puisse négliger les puissances supérieures à la première ; ce qui comprendra toutes les formes d'élémens qui ne différeront pas beaucoup de la sphère, et suffira à la vérification des équations (10) que nous nous sommes proposée.

(14) Faisons d'abord tout-à-fait abstraction de t, et développons, suivant les puissances de r, la quantité irrationnelle comprise sous le double signe d'intégration ; nous aurons, en série convergente,

$$[a^2 - 2ar(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v-v')) + r^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} Y_0$$
$$+ \frac{r}{a^2} Y_1 + \frac{r^2}{a^3} Y_2 + \frac{r^3}{a^4} Y_4 + \&c.;$$

les coefficiens Y_0, Y_1, Y_2, &c., étant des fonctions de sinus et de cosinus des angles u, v, u', v', qui jouissent de propriétés connues. En vertu de ces propriétés, on conclura immédia-

tement pour la première valeur approchée de $\mu\, e$, qui satisfait à l'équation (11),

$$e = \mu \frac{C}{4\pi a} + \frac{3}{4\pi}(\alpha_{,} \cos u' + \beta_{,} \sin u' \sin v' + \gamma_{,} \sin u' \cos v').$$

Pour en obtenir une seconde, nous ajouterons un terme s à cette première valeur; en retenant ensuite dans l'équation (11) les termes de première dimension par rapport à s et à t, et réduisant, on aura

$$\iint \left(Y_0 + \frac{r}{a} Y_1 + \frac{r^2}{a^2} Y_2 + \frac{r^3}{a^3} Y_3 + \&c.\right) s \sin u'\, du'\, dv'$$
$$= \iint \left(-Y_0 + \frac{r^2}{a^2} Y_2 + \frac{2r^3}{a^3} Y_3 + \frac{3r^4}{a^4} Y_4 + \&c.\right) \mu\, e\, t \sin u'\, du'\, dv',$$

où l'on a conservé, pour abréger, $\mu\, e$ à la place de sa valeur précédente. Quelle que soit la valeur de $\mu\, e\, t$ en fonction de u' et v', on peut l'exprimer par une série de cette forme (*):

$$\mu\, e\, t = Z'_0 + Z'_1 + Z'_2 + Z'_3 + \&c., \qquad (12)$$

dont les termes sont de certaines fonctions des sinus et cosinus de ces deux angles, qui sont telles, que l'on a

$$\iint Z'_i\, Y_{i'} \sin u'\, du'\, dv' = 0,$$

quand les indices i' et i sont différens; et

$$\iint Z'_i\, Y_i \sin u'\, du'\, dv' = \frac{4\pi Z_i}{2i+1},$$

quand ils sont égaux : Z_i représentant ce que devient Z'_i lorsqu'on y remplace u' et v' par u et v, et les intégrales étant prises depuis $u' = 0$ et $v' = 0$, jusqu'à $u' = \pi$ et $v' = 2\pi$. De cette manière, le second membre de l'équation précédente deviendra

$$4\pi\left(-Z_0 + \frac{r^2}{5a^2} Z_2 + \frac{r^3}{7a^3} Z_3 + \ldots \frac{(i-1)\, r^i}{(2i+1)\, a^i} Z_i + \&c.\right);$$

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 19.e cahier, page 145.

et pour que le premier lui soit identique, il faudra qu'on ait

$$s = -Z'_0 + Z'_2 + 2Z'_3 + \ldots + (i-1)Z'_i + \&c.$$

C'est à cette seconde approximation que nous nous arrêterons. Si l'élément magnétique que nous considérons, était un ellipsoïde, et que l'on plaçât l'origine des coordonnées polaires à son centre, t serait une fonction de u' et v', de la même nature que Z'_2; le développement de $\mu e t$ ne contiendrait que les trois termes Z'_0, Z'_1 et Z'_3; tous les autres seraient nuls, et même Z'_0 serait aussi nul, d'après la condition que la totalité du fluide libre à la surface de l'élément fût égale à zéro. Ainsi, dans ce cas particulier, la valeur précédente de s se réduira au seul terme $2Z'_3$. Dans tous les cas, on pourra ramener cette série à la forme finie, au moyen d'une intégrale définie; mais cette transformation ne serait point utile à l'objet que nous avons en vue.

(15) Maintenant, la distribution du fluide libre à la surface de l'élément magnétique étant déterminée, il sera facile d'en conclure les valeurs correspondantes des intégrales α', β', γ', du n.° 3; ce qui fera connaître les relations existantes pour un même élément, entre ces intégrales et les quantités $\alpha_,$, $\beta_,$, $\gamma_,$. Nous continuerons de désigner par α, β, γ, ce que deviennent α', β', γ', quand les coordonnées d'un point C, pris dans l'intérieur de l'élément auquel elles répondent, sont x, y, z. D'après les notations précédentes et celles du numéro cité, nous aurons

$$h\chi = a(1+t)\cos u',$$
$$h\xi = a(1+t)\sin u' \sin v',$$
$$h\zeta = a(1+t)\sin u' \cos v'.$$

L'élément de volume de la couche de fluide libre pourra s'exprimer au moyen de l'épaisseur ε normale à sa surface, ou

bien au moyen de l'épaisseur inclinée e, et, ces deux expressions devant être égales entre elles, on en conclura

$$\varepsilon h^2 ds = e a^2 (1 + t)^2 \sin u' du' dv';$$

observant de plus qu'on doit avoir $h^3 = \frac{4\pi a^3}{3}$, les intégrales α, β, γ, prendront la forme

$$\alpha = \frac{3}{4\pi} \int\int (1 + t)^3 \mu e \cos u' \sin u' du' dv',$$

$$\beta = \frac{3}{4\pi} \int\int (1 + t)^3 \mu e \sin^2 u' \sin v' du' dv',$$

$$\gamma = \frac{3}{4\pi} \int\int (1 + t)^3 \mu e \sin^2 u' \cos v' du' dv'.$$

Si l'on néglige t et le terme s de la valeur de μe, les intégrations s'effectueront immédiatement, et l'on trouvera

$$\alpha = \frac{3\alpha_{,}}{4\pi}, \quad \beta = \frac{3\beta_{,}}{4\pi}, \quad \gamma = \frac{3\gamma_{,}}{4\pi}; \qquad (13)$$

ce qui serait les valeurs exactes de α, β, γ, si l'élément magnétique était une sphère. En conservant les termes d'une seule dimension, par rapport à t et s, on aura, par exemple,

$$\left.\begin{aligned}\alpha = \frac{3\alpha_{,}}{4\pi} &+ \frac{9}{4\pi}\int\int \mu e t \cos u' \sin u' du' dv' \\ &+ \frac{3}{4\pi}\int\int s \cos u' \sin u' du' dv'.\end{aligned}\right\} (14)$$

Or, d'après les propriétés des termes de la série (12), dans laquelle on a développé $\mu e t$, on a

$$\int\int Z'_i \cos u' \sin u' du' dv' = 0,$$

excepté dans le cas de $i = 1$; d'où il résulte que la seconde intégrale double, qui entre dans cette valeur de α, se réduira à zéro, et la première à un seul terme, quelle que soit la forme de l'élément magnétique. Il en sera de même à l'égard des valeurs de β et γ, qui s'exprimeront aussi sous forme finie.

Pour former de la manière la plus simple la valeur de la première intégrale double, contenue dans l'équation (14), supposons que le point C, origine des coordonnées polaires, soit le centre de gravité de l'élément magnétique; faisons d'abord coïncider les axes auxquels ces coordonnées se rapportent, avec les trois axes principaux de rotation menés par ce centre, et désignons dans ce cas par $u_{,}$ et $v_{,}$ ce que deviennent les angles u' et v'; observons de plus que a est le rayon de la sphère équivalente au volume de cet élément : il en résultera que si l'on développe t en série de la même nature que la série (12), les deux premiers termes manqueront dans ce développement, et le troisième terme sera de la forme (*):

$$g\left(\frac{1}{3}-\cos^2 u_{,}\right)+g'\left(\sin^2 u_{,}\cos^2 v_{,}-\sin^2 u_{,}\sin^2 v_{,}\right);$$

g et g' étant des coefficiens constans qui dépendront uniquement de la forme de l'élément magnétique. Si l'on veut ensuite transformer les angles $u_{,}$ et $v_{,}$, relatifs à ces axes principaux, dans les angles u' et v' qui se rapportent à des axes quelconques, on observera que $\cos u_{,}$, $\sin u_{,}\sin v_{,}$, $\sin u_{,}\cos v_{,}$, sont les cosinus des angles que fait le rayon vecteur $a(1+t)$ avec les premiers axes, et que leurs valeurs, en fonctions de u' et v', sont

$$\cos u_{,}=\cos u'\cos l+\sin u'\sin v'\cos m+\sin u'\cos v'\cos n,$$
$$\sin u_{,}\sin v_{,}=\cos u'\cos l'+\sin u'\sin v'\cos m'+\sin u'\cos v'\cos n',$$
$$\sin u_{,}\cos v_{,}=\cos u'\cos l''+\sin u'\sin v'\cos m''+\sin u'\cos v'\cos n'';$$

l, m, &c. étant, comme dans le n.° 12, les neuf angles que font les axes principaux avec les autres axes. Substituant donc ces valeurs dans la formule précédente, elle se trouvera exprimée en fonction de u' et v', ou rapportée à des axes fixes quelconques. Ce second terme du développement de t sera le

(*) *Mécanique céleste*, tome II, pages 33 et 93.

seul qui subsistera dans la valeur de l'intégrale double

$$\int\int \mu e t \cos u' \sin u' du' dv';$$

en le combinant avec la première valeur approchée de μe, et effectuant les intégrations pour les limites données, on obtiendra, sans difficulté, la valeur de cette intégrale. Si l'on met ensuite cette valeur dans l'équation (14), et que l'on ait égard aux équations (9) qui lient les angles l, m, &c. entre eux, on aura, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}\alpha = \frac{3\alpha_{,}}{4\pi} - \frac{4g\alpha_{,}}{3} &+ \tfrac{6}{5}(g-g')\alpha_{,}\cos^2 l' + \tfrac{6}{5}(g+g')\alpha_{,}\cos^2 l'' \\ &+ \tfrac{6}{5}(g-g')\beta_{,}\cos m'\cos l' + \tfrac{6}{5}(g+g')\beta_{,}\cos m''\cos l'' \\ &+ \tfrac{6}{5}(g-g')\gamma_{,}\cos m'\cos l' + \tfrac{6}{5}(g+g')\gamma_{,}\cos n''\cos l'';\end{aligned}$$

et l'on formera de même les valeurs de β et γ.

Il est évident que les coefficiens de $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, dans cette dernière formule, ne peuvent être indépendans des angles l, m, &c., à moins qu'on n'ait $g = 0$, $g' = 0$. Les valeurs de α, β, γ, seront alors les mêmes que si l'élément magnétique auquel elles se rapportent, était une sphère, et elles seront données par les équations (13), dont la forme est la même que celle des équations (10), ce qu'il s'agissait de vérifier. Pour que ces deux systèmes d'équations coïncident, il faudra qu'on ait $p = \frac{3}{4\pi}$; telle sera donc la valeur de p dans le cas que nous venons de considérer. Si les élémens magnétiques s'écartaient beaucoup de la forme sphérique, la valeur de cette quantité serait très-difficile à déterminer; mais heureusement, d'après la remarque qui termine le n.° 12, nous pouvons nous passer de la connaître : pour fixer les idées, nous attribuerons à cette quantité p la valeur $\frac{3}{4\pi}$ qui aurait lieu dans le cas des élémens sphériques, ou peu différens de cette forme.

(16) Nous conserverons les quantités α, β, γ, dans les équations (7), et nous en éliminerons $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, au moyen des équations (13). Nous aurons alors

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dx} + X + \frac{4\pi}{3}\alpha = 0, \\ \frac{dV}{dy} + Y + \frac{4\pi}{3}\beta = 0, \\ \frac{dV}{dz} + Z + \frac{4\pi}{3}\gamma = 0, \end{aligned}\right\} (15)$$

pour les trois équations de l'équilibre magnétique.

Elles auront lieu pour tous les points du fluide neutre contenus dans chaque élément magnétique, en excluant toujours les élémens situés à la surface de A, ou qui n'en sont qu'à une distance insensible (n.° 8). Elles subsisteront encore à la surface intérieure de la couche de fluide libre qui termine cet élément; mais elles n'auront plus lieu dans l'épaisseur de cette couche, ni à sa surface extérieure. Les particules de fluide libre situées à la première surface ne sont donc retenues par aucune force; et c'est pour cette raison que nous avons dit, dans le préambule de ce Mémoire, que le fluide magnétique devait être dépourvu d'élasticité : car, sans cela, rien n'empêcherait la couche de fluide libre de se dilater et de remplir l'intérieur de l'élément. Dans l'épaisseur de cette couche, et à sa surface extérieure, où les forces qui agissent sur les particules fluides ne sont pas nulles, il se produit une pression qui doit être détruite, comme nous l'avons déjà dit, par l'obstacle quelconque qui empêche le fluide magnétique de sortir de l'élément auquel il appartient; mais il y a, à cet égard, une observation à faire.

A la fin du n.° 9, nous avons remarqué que l'action du corps A sur une particule de fluide libre située à la surface extérieure de la couche qui termine un de ses élémens, a pour composantes X, Y, Z; en y joignant donc celles des forces

extérieures qui sont exprimées par les différences partielles de V, les composantes suivant les axes des x, y, z, de la force totale qui sollicite cette particule, seront

$$\frac{dV}{dx} + X, \quad \frac{dV}{dy} + Y, \quad \frac{dV}{dz} + Z.$$

Ces quantités ne changeront pas sensiblement dans l'étendue d'un même élément, et, en vertu des équations précédentes, elles seront respectivement égales à

$$-\frac{4\pi\alpha}{3}, \quad -\frac{4\pi\beta}{3}, \quad -\frac{4\pi\gamma}{3}.$$

Si donc on désigne par n, n', n'', les trois angles compris entre les directions de ces forces et la partie extérieure de la normale à la surface de l'élément magnétique, au point où est située la particule que l'on considère, et si l'on appelle N la composante dirigée suivant cette droite, on aura

$$N = -\frac{4\pi}{3}(\alpha \cos n + \beta \cos n' + \gamma \cos n'').$$

Or, pour que cette force puisse être détruite par la résistance qui s'oppose à ce que le fluide libre sorte de l'élément, il sera nécessaire qu'elle agisse de dedans en dehors en tous les points de sa surface; et, pour cela, il faudra qu'elle soit positive ou négative, selon que la particule sur laquelle elle agit, sera australe ou boréale. Réciproquement, on pourra donc assurer que le fluide libre sera austral ou boréal, en un point donné sur la surface d'un élément, selon que la valeur de N, relative à ce point, sera positive ou négative. C'est ce que nous pouvons vérifier dans le cas où l'élément magnétique est une sphère.

En effet, dans ce cas, la première valeur de μe trouvée dans le n.° 14 sera complète; la constante c qu'elle contient sera nulle, d'après la condition de l'égalité des deux fluides boréal et austral, à la surface de l'élément; et si l'on suppose

que son centre soit l'origine des angles u' et v', on aura

$\cos n = \cos u'$, $\cos n' = \sin u' \sin v'$, $\cos n'' = \sin u' \cos v'$;

mettant de plus à la place de $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, leurs valeurs données par les équations (13), on aura

$$\mu e = \alpha \cos n + \beta \cos n' + \gamma \cos n'',$$

et par conséquent,

$$N = -\frac{4\pi}{3}\mu e;$$

où l'on voit que les quantités N et μe seront de signes contraires, ce qui équivaut à la proposition qu'il fallait vérifier.

Toute la théorie du magnétisme, relativement aux corps aimantés par influence, dépend maintenant de la résolution des trois équations (15). Dans chaque cas particulier, le problème consistera à en déduire les valeurs des trois quantités α, β, γ, en fonctions des coordonnées du point auquel elles se rapportent; mais, avant de chercher à les résoudre, il est nécessaire de les ramener à des formes plus simples, en réduisant, s'il est possible, à des intégrales doubles, les intégrales triples que X, Y, Z, représentent, et qui sont contenues dans ces équations. C'est ce qui va nous occuper dans le paragraphe suivant.

§. II.

Simplification des Formules précédentes.

(17) Nous considérerons d'abord les seconds membres des équations (5) (n.° 6), dans le cas où les coordonnées x, y, z, appartiennent à un point M situé en dehors de A. Les limites de ces intégrales triples seront alors indépendantes de x, y, z, en sorte qu'on pourra transporter en avant des signes $\int$ les

signes de différenciations relatives à ces variables ; ce qui changera les équations (5) en celles-ci :

$$X=\frac{dQ}{dx},\ Y=\frac{dQ}{dy},\ Z=\frac{dQ}{dz}; \qquad (a)$$

en faisant, pour abréger,

$$Q=\int\int\int\left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx'}\alpha'+\frac{d\frac{1}{\rho}}{dy'}\beta'+\frac{d\frac{1}{\rho}}{dz'}\gamma'\right)k'dx'dy'dz'.$$

Soit aussi

$$\frac{d.\alpha'k'}{dx'}+\frac{d.\beta'k'}{dy'}+\frac{d.\gamma'k'}{dz'}=p',$$

$$\int\int\int\frac{1}{\rho}p'\,dx'\,dy'\,dz'=P;$$

la valeur de Q deviendra

$$Q=\int\int\int\left(\frac{d.\frac{\alpha'k'}{\rho}}{dx'}+\frac{d.\frac{\beta'k'}{\rho}}{dy'}+\frac{d.\frac{\gamma'k'}{\rho}}{dz'}\right)dx'dy'dz'-P.$$

Pour fixer les idées, supposons que l'axe des z' soit vertical et dirigé de bas en haut, que le corps A soit tout entier au-dessus du plan des x', y', et qu'il y ait seulement deux points de la surface de ce corps qui répondent à chaque couple de valeurs de x', y' : ces points pourraient être au nombre de quatre, six, &c., selon la forme du corps ; mais on ramènera toujours ces autres cas à celui que nous supposons, en considérant ces points deux à deux consécutivement. Ce sera entre les ordonnées verticales des deux points de la surface qui répondent aux mêmes valeurs de x', y', que l'on devra prendre les intégrales relatives à z' : ainsi l'on aura

$$\int\int\int\frac{d.\frac{\gamma'k'}{\rho}}{dz'}dx'\,dy'\,dz'=\int\int\left[\frac{\gamma'k'}{\rho}\right]dx'\,dy'$$
$$-\int\int\left(\frac{\gamma'k'}{\rho}\right)dx'\,dy';$$

les quantités $\left[\frac{\gamma' k'}{\rho}\right]$ et $\left(\frac{\gamma' k'}{\rho}\right)$ se rapportant, la première au point supérieur, et la seconde au point inférieur. Si donc on conçoit un cylindre vertical tangent à la surface de A, qui la divise en deux parties, il faudra étendre la première des deux intégrales doubles à la partie supérieure, et la seconde à la partie inférieure. Or, en appelant n' l'angle compris entre la verticale tirée de bas en haut, par le point de la surface de A, dont les coordonnées sont x', y', z', et la partie extérieure de la normale à cette surface au même point, cet angle sera aigu dans toute la première partie de la surface, et obtus dans toute la seconde partie; désignant de plus par $d\omega'$ l'élément différentiel de la surface à ce même point, sa projection sur le plan des x', y', sera $dx'dy'$, et l'on aura

$$dx'dy' = \pm \cos n' \, d\omega',$$

en prenant le signe $+$ quand n' sera aigu, et le signe $-$ quand cet angle sera obtus. D'après cela, nous pourrons réduire la différence de nos deux intégrales doubles à une seule intégrale étendue à la surface entière de A, savoir:

$$\int\int\left[\frac{\gamma' k'}{\rho}\right]dx'dy' - \int\int\left(\frac{\gamma' k'}{\rho}\right)dx'dy'$$
$$= \int\int\frac{\gamma' k' \cos n'}{\rho}\,d\omega'.$$

Nous aurons donc

$$\int\int\int\frac{d.\frac{\gamma' k'}{\rho}}{dz'}\,dx'dy'dz' = \int\frac{\gamma' k' \cos n'}{\rho}\,d\omega';$$

et, par des raisonnemens semblables, on trouvera

$$\int\int\int\frac{d.\frac{\beta' k'}{\rho}}{dy'}\,dx'dy'dz' = \int\frac{\beta' k' \cos m'}{\rho}\,d\omega',$$

$$\int\int\int \frac{d.\frac{\alpha' k'}{\rho}}{dx'}\, dx'\, dy'\, dz' = \int \frac{\alpha' k' \cos l'}{\rho}\, d\omega';$$

en désignant par m' et l' les angles que la partie extérieure de la normale à la surface de A au point dont les coordonnées sont x', y', z', fait avec des droites menées par ce point, dans les directions des y' et x' positives. Par conséquent, la valeur précédente de Q se changera en celle-ci:

$$Q = \int (\alpha' \cos l' + \beta' \cos m' + \gamma' \cos n') \frac{k'}{\rho} d\omega' - P, \quad (b)$$

dans laquelle la première intégrale s'étend à la surface entière de A, et l'intégrale que P représente, à son volume entier.

(18) Lorsque le point M, dont les coordonnées sont x, y, z, sera situé dans l'intérieur de A, les expressions des quantités X, Y, Z, seront différentes : les intégrales triples qu'elles représentent, ne devant pas comprendre les points de A qui sont contenus dans une très-petite étendue autour de M (n.° 7), si l'on appelle B cette petite portion de A, il faudra d'abord calculer les valeurs de X, Y, Z, comme dans le numéro précédent, en étendant ces intégrales à A tout entier, puis en retrancher les valeurs de ces mêmes intégrales, relatives à B: ainsi, en désignant ces dernières valeurs par $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, nous aurons, dans le cas d'un point intérieur,

$$X = \frac{dQ}{dx} - X_{,}, \quad Y = \frac{dQ}{dy} - Y_{,}, \quad Z = \frac{dQ}{dz} - Z_{,};$$

la valeur de Q étant donnée par l'équation (b), comme dans le cas d'un point extérieur. Il ne s'agira donc plus que de trouver les valeurs de $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$.

Or nous avons, par exemple (n.° 6),

$$Z_{,} = \int\int\int \frac{dq}{dz}\, k'\, dx'\, dy'\, dz';$$

remettant pour q sa valeur (n.° 3), et effectuant la différen-

ciation relative à z, il vient

$$Z_{,}=\int\int\int\left[\frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dx'}\alpha' k'+\frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dy'}\beta' k' +\frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dz'}\gamma' k'\right]dx'\,dy'\,dz'.$$

Dans l'étendue de B, les quantités α', β', γ' et k' ne varient pas sensiblement; on peut donc les regarder comme constantes dans cette intégration, et prendre pour leurs valeurs celles qui répondent au point M: ainsi, en désignant par α, β, γ et k, ce que deviennent ces quatre quantités, quand on y fait $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$, nous aurons

$$Z_{,}=\alpha k\int\int\int\frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dx'}dx'\,dy'\,dz' +\beta k\int\int\int\frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dy'}dx'\,dy'\,dz' +\gamma k\int\int\int\frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dz'}dx'\,dy'\,dz'.$$

Par un raisonnement semblable à celui du numéro précédent, on changera chacune de ces intégrales triples en une intégrale relative à la surface de B; et si l'on désigne par $d\omega''$ l'élément différentiel de cette surface, en un point quelconque M'', dont les coordonnées sont x', y', z', et par l'', m'', n'', les angles que la partie extérieure de la normale à cette surface, menée par le point M'', fait avec les axes des x', y', z', positives, on aura

$$Z_{,}=\alpha k\int\frac{(z'-z)\cos l''}{\rho^3}d\omega''+\beta k\int\frac{(z'-z)\cos m''}{\rho^3}d\omega'' +\gamma k\int\frac{(z'-z)\cos n''}{\rho^3}d\omega''.$$

Représentons maintenant par u l'angle compris entre le rayon ρ mené du point M au point M'', et la droite menée par le point M dans le sens des z positives ; désignons aussi par v l'angle que fait le plan de ces deux droites, avec un plan fixe passant par la seconde ; en sorte que ρ, u et v, soient les trois coordonnées polaires du point M'', rapportées au point M comme origine, et qu'on ait

$$z'-z=\rho\cos u,\; y'-y=\rho\sin u\sin v,\; x'-x=\rho\sin u\cos v.$$

Comme la forme de B est arbitraire, nous supposerons que cette partie de A soit une sphère qui ait son centre au point M, afin de pouvoir effectuer immédiatement les intégrations relatives à sa surface. Nous aurons alors

$$d\omega''=\rho^2\sin u\,du\,dv,$$

$$\cos l''=\sin u\cos v,\;\cos m''=\sin u\sin v,\;\cos n''=\cos u;$$

les intégrales qui entrent dans la valeur de $Z_{,}$ devront être prises depuis $u=0$, $v=0$, jusqu'à $u=\pi$, $v=2\pi$; au moyen de quoi, cette valeur se réduira à

$$Z_{,}=\frac{4\pi k\gamma}{3}.$$

On trouvera de même

$$Y_{,}=\frac{4\pi k\beta}{3},\; X_{,}=\frac{4\pi k\alpha}{3};$$

et les valeurs de X, Y, Z, relatives à un point intérieur, deviendront

$$X=\frac{dQ}{dx}-\frac{4\pi k\alpha}{3},$$

$$Y=\frac{dQ}{dy}-\frac{4\pi k\beta}{3},$$

$$X=\frac{dQ}{dz}-\frac{4\pi k\gamma}{3}.$$

(19) Ce sont ces valeurs qu'il faudra substituer dans les équations (15) de l'équilibre magnétique; ce qui les changera en celles-ci:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{dx}+\frac{dQ}{dx}+\frac{4\pi\alpha(1-k)}{3}&=0,\\ \frac{dV}{dy}+\frac{dQ}{dy}+\frac{4\pi\beta(1-k)}{3}&=0,\\ \frac{dV}{dz}+\frac{dQ}{dz}+\frac{4\pi\gamma(1-k)}{3}&=0.\end{aligned}\right\}(c)$$

On sait que, par la nature de la fonction V, on a

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0. \qquad (d)$$

On a aussi identiquement

$$\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dz^2}=0;$$

et si l'on fait subir à cette quantité nulle, des intégrations relatives aux variables x', y', z', qui sont contenues dans ρ, les intégrales seront encore égales à zéro, pourvu qu'entre leurs limites, les variables x', y', z', ne passent pas par les valeurs particulières $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$: car j'ai déjà eu l'occasion de faire remarquer (*) que ces intégrales ne sont pas nulles, lorsque la quantité ρ devient infiniment petite entre les limites dans lesquelles on a intégré. Observons d'ailleurs que, les limites des deux intégrales que renferme le second membre de l'équation (b), étant indépendantes de la position du point M, si on les différencie par rapport aux coordonnées x, y, z, on pourra faire passer les signes de différenciations sous les signes $\int$; on aura donc

(*) *Bulletin de la Société philomathique*, décembre 1813.

$$\frac{d^2 Q}{d x^2} + \frac{d^2 Q}{d y^2} + \frac{d^2 Q}{d^2 z} = \int (\alpha' \cos l' + \beta' \cos m' + \gamma' \cos n') \left[\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d x^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d y^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d z^2} \right] k' \, d\omega'$$
$$- \int\int\int \left[\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d x^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d y^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d z^2} \right] p' \, dx' \, dy' \, dz'.$$

Or, le point M étant à une distance sensible de la surface de A (n.° 8), la quantité ρ ne deviendra pas nulle entre les limites de la première intégrale, qui se rapporte à cette surface; cette intégrale s'évanouira donc d'après ce qu'on vient de dire; mais, la seconde intégrale s'étendant au volume entier de A, dont le point M fait partie, elle ne se réduira pas à zéro.

Pour en avoir la valeur, il faudra distinguer dans A, autour du point M, une portion B que l'on fera aussi petite qu'on voudra, et partager cette intégrale en deux parties, l'une relative à B, et l'autre relative au reste de A. Cette seconde partie sera nulle, puisque la quantité ρ ne s'évanouira pas entre ses limites. Dans l'étendue de B, on pourra regarder comme constante la quantité p' qui entre sous les signes $\int$, et prendre pour sa valeur celle qui répond au point M, savoir:

$$\frac{d.\,k\alpha}{dx} + \frac{d.\,k\beta}{dy} + \frac{d.\,k\gamma}{dz}.$$

On a de plus

$$\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d x^2} = \frac{d \frac{x - x'}{\rho^3}}{d x'},$$
$$\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d y^2} = \frac{d \frac{y - y'}{\rho^3}}{d y'},$$
$$\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d z^2} = \frac{d \frac{z - z'}{\rho^3}}{d z'};$$

et d'après ces diverses considérations, l'équation précédente se réduira à

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} + \frac{d^2 Q}{dy^2} + \frac{d^2 Q}{dz^2} = \left(\frac{d.k\alpha}{dx} + \frac{d.k\beta}{dy} + \frac{d.k\gamma}{dz}\right)\left[\int\!\!\int\!\!\int \frac{d\,\frac{x'-x}{\rho^3}}{dx'}\,dx'\,dy'\,dz' + \int\!\!\int\!\!\int \frac{d\,\frac{y'-y}{\rho^3}}{dy'}\,dx'\,dy'\,dz' + \int\!\!\int\!\!\int \frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dz'}\,dx'\,dy'\,dz'\right].$$

Si nous supposons présentement, ce qui est permis, que B soit une sphère, les intégrations indiquées dans cette équation s'effectueront comme dans le numéro précédent, et, quel que soit le rayon de B, chaque intégrale triple sera égale à $\frac{4\pi}{3}$: nous aurons donc enfin

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} + \frac{d^2 Q}{dy^2} + \frac{d^2 Q}{dz^2} = 4\pi\left(\frac{d.k\alpha}{dx} + \frac{d.k\beta}{dy} + \frac{d.k\gamma}{dz}\right). \quad (e)$$

Cela posé, si nous faisons la somme des trois équations (c), après avoir différencié la première par rapport à x, la deuxième par rapport à y, et la troisième par rapport à z, nous aurons, en ayant égard aux équations (d) et (e), et réduisant,

$$2\left(\frac{d.k\alpha}{dx} + \frac{d.k\beta}{dy} + \frac{d.k\gamma}{dz}\right) + \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0.$$

Dans le cas le plus général, la quantité k varie d'un point à un autre de A; mais le plus communément ce corps sera homogène, il aura par-tout la même température, et k sera une quantité indépendante de x, y, z. C'est ce cas particulier que nous nous bornerons à considérer dans la suite de ce Mémoire. Si k était variable, la distribution du magnétisme dans l'intérieur de A, et les lois de son action extérieure, seraient très-différentes et plus difficiles à déterminer.

(20) La quantité k étant donc supposée constante, l'équation que nous venons de trouver, se réduira à

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0. \qquad (f)$$

De plus, par des différenciations relatives à x, y, z, on déduit des équations (c) celles-ci :

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\beta}{dx}, \quad \frac{d\alpha}{dz} = \frac{d\gamma}{dx}, \quad \frac{d\beta}{dz} = \frac{d\gamma}{dy};$$

ce qui nous montre que α, β, γ, seront les trois différences partielles d'une même fonction de x, y, z: de sorte qu'en appelant φ cette fonction inconnue, on aura

$$\alpha = \frac{d\varphi}{dx}, \quad \beta = \frac{d\varphi}{dy}, \quad \gamma = \frac{d\varphi}{dz}; \qquad (g)$$

et l'équation (e) deviendra

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{ny^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0. \qquad (h)$$

Ces dernières formules établiraient des rapports singuliers entre la distribution des deux fluides magnétiques dans un corps aimanté par influence, et le mouvement des fluides incompressibles; mais nous ne nous arrêterons point à développer cette analogie, qui ne serait d'aucune utilité pour la solution du problème dont nous nous occupons, et qui pourrait induire en erreur sur la nature du magnétisme.

Les trois équations (c) de l'équilibre magnétique se réduiront à cette seule équation :

$$V + Q + \frac{4\pi(1-k)}{3}\varphi = 0, \qquad (i)$$

dont elles seront les différences partielles relatives à x, y, z: la constante arbitraire que cette équation devrait renfermer, sera comprise dans la valeur de l'inconnue φ.

La quantité P, contenue dans la valeur de Q, s'évanouira en vertu de l'équation (f), et cette valeur deviendra

$$Q = k\int\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos l' + \frac{d\varphi'}{dy'}\cos m' + \frac{d\varphi'}{dz'}\cos n'\right)\frac{d\omega'}{\rho},$$

en désignant par φ' ce que φ devient, quand on y met x', y', z', à la place de x, y, z. Lorsque le point M, dont ces dernières variables sont les coordonnées, sera situé hors de A, les équations (a) donneront les composantes de l'action de ce corps sur le point M, en y substituant cette valeur de Q; or on voit par la forme de cette quantité, que la résultante des forces X, Y, Z, sera équivalente, en grandeur et en direction, à l'action d'une couche de fluide libre qui recouvrirait la surface entière de A, et dont l'épaisseur normale serait exprimée par

$$k\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos l' + \frac{d\varphi'}{dy'}\cos m' + \frac{d\varphi'}{dz'}\cos n'\right),$$

au point quelconque qui répond aux coordonnées x', y', z'.

Comme les équations d'après lesquelles la valeur de Q s'est réduite à la précédente, n'ont pas lieu pour les élémens magnétiques qui répondent à la surface de A, ou qui n'en sont pas à une distance sensible, il en résulte que les valeurs de X, Y, Z, calculées au moyen de cette valeur, ne comprendront pas l'action de ces élémens; mais on peut, sans crainte d'erreur appréciable, négliger cette action, et la regarder comme insensible par rapport à celle de tous les élémens dont A est composé.

(21) Lorsque ce corps homogène, et dans lequel la température est par-tout la même, renfermera dans son intérieur un espace vide, il est évident que l'on calculera son action sur un point quelconque, extérieur ou intérieur, en considérant A comme la différence de deux corps de la même nature, dont l'un serait terminé par sa surface extérieure, et l'autre par sa surface intérieure; en sorte que l'on aura, dans ce cas, l'expression de chacune des composantes X, Y, Z, en formant ses valeurs relatives à ces deux corps, et retranchant la valeur qui

se rapporte au second, de celle qui se rapporte au premier. Supposons donc que la valeur précédente de Q soit relative à la surface extérieure de A; désignons ensuite par x'', y'', z'', les coordonnées d'un point quelconque M'' de sa surface intérieure; par φ'' ce que devient la fonction φ par rapport à ces variables; par l'', m'', n'', les angles que fait avec les axes des x'', y'', z'', positives, la portion de la normale à cette même surface au point M'', comprise dans la partie vide de A: angles supplémentaires de ceux qui seraient, par rapport à cette surface, analogues aux angles l', m', n', relatifs à la surface extérieure. Soit encore $d\omega''$, l'élément différentiel de la surface intérieure, qui répond au même point M''; représentons enfin par ρ' ce que devient la distance ρ, quand on y remplace x', y', z', par x'', y'', z'': la valeur complète de Q sera

$$Q = k\int\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos l' + \frac{d\varphi'}{dy'}\cos m' + \frac{d\varphi'}{dz'}\cos n'\right)\frac{d\omega'}{\rho}$$
$$+ k\int\left(\frac{d\varphi''}{dx''}\cos l'' + \frac{d\varphi''}{dy''}\cos m'' + \frac{d\varphi''}{dz''}\cos n''\right)\frac{d\omega''}{\rho'},$$

en étendant la première intégrale à toute la surface extérieure de A, et la seconde à toute sa surface intérieure. Il faudra donc substituer cette expression à la place de Q dans l'équation (i) de l'équilibre magnétique, qui devra servir à déterminer la fonction φ, et ensuite dans les équations (a), pour avoir les composantes de l'action de A sur un point M situé hors de la partie pleine de ce corps, et pouvant appartenir à l'espace vide qu'il renferme.

Si nous plaçons dans cet espace l'origine des coordonnées x, y, z, de ce point quelconque M; de plus, si nous désignons par r son rayon vecteur, par θ l'angle que fait ce rayon avec l'axe des z positives, et par ψ l'angle compris entre le plan de ces deux droites, et le plan des x, z, nous aurons

$$z = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\sin\psi,\ x = r\sin\theta\cos\psi.$$

Soient, en outre, r', θ', ψ', ce que deviennent les variables

r, θ, ψ, par rapport à un point M' de la surface extérieure de A, et r'', θ'', ψ'', ce qu'elles deviennent relativement à un point M'' de sa surface intérieure; les carrés des distances ρ et ρ' de ces points au point M seront

$$\rho^2 = r^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi')] + r'^2,$$
$$\rho'^2 = r^2 - 2rr''[\cos\theta\cos\theta'' + \sin\theta\sin\theta''\cos(\psi - \psi'')] + r''^2.$$

Représentons aussi par ϖ' l'angle que la partie extérieure de la normale à la première surface, au point M', fait avec le prolongement du rayon vecteur r' de ce point, et par ϖ'' l'angle analogue relativement au point M'' de la seconde surface. En projetant les élémens $d\omega'$ et $d\omega''$ de ces deux surfaces sur les surfaces sphériques dont les rayons sont r' et r'', on aura

$$\cos\varpi' \, d\omega' = r'^2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi',$$
$$\cos\varpi'' \, d\omega'' = r''^2 \sin\theta'' \, d\theta'' \, d\psi'';$$

faisons enfin, pour abréger,

$$k\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos l' + \frac{d\varphi'}{dy'}\cos m' + \frac{d\varphi'}{dz'}\cos n'\right) = E'\cos\varpi',$$
$$k\left(\frac{d\varphi''}{dx''}\cos l'' + \frac{d\varphi''}{dy''}\cos m'' + \frac{d\varphi''}{dz''}\cos n''\right) = E''\cos\varpi'';$$

de manière que E' et E'' soient les épaisseurs évaluées suivant les rayons vecteurs r' et r'', des couches de fluide libre dont les actions réunies remplacent celle de A, ou plutôt les produits de ces épaisseurs par la densité du fluide, considérés comme positifs ou comme négatifs, selon que le fluide libre est boréal ou austral. Au moyen de ces diverses notations, la valeur de Q deviendra

$$Q = \iint \frac{1}{\rho} E' r'^2 \sin\theta' d\theta' d\psi' + \iint \frac{1}{\rho'} E'' r''^2 \sin\theta'' d\theta'' d\psi'';$$

et les intégrales devront être prises depuis $\theta' = 0$, $\psi' = 0$, $\theta'' = 0$, $\psi'' = 0$, jusqu'à $\theta' = \pi$, $\psi' = 2\pi$, $\theta'' = \pi$, $\psi'' = 2\pi$.

Dans le cas que nous examinons, on peut supposer, pour

plus de généralité, que les centres d'une partie des forces qui agissent sur A sont compris dans l'espace vide que ce corps renferme; si l'on suppose alors que la fonction V ne soit relative qu'aux forces qui ont leurs centres en dehors de A, et que l'on représente par U la fonction analogue, qui se rapportera aux forces dont les centres sont compris dans l'espace intérieur, il faudra mettre $V+U$ à la place de V dans l'équation (i), laquelle deviendra finalement

$$\left.\begin{array}{c} V+U+\frac{4\pi(1-k)}{3}\varphi \\ +\iint\frac{1}{\rho}E'r'^2\sin\theta'd\theta'd\psi'+\iint\frac{1}{\rho'}E''r''^2\sin\theta''d\theta''d\psi''=0. \end{array}\right\}\ (k)$$

Lorsqu'on aura $k=1$, elle coïncidera avec l'équation d'après laquelle on déterminerait les épaisseurs E' et E'' des couches électriques correspondantes aux deux surfaces de A, s'il s'agissait d'un corps électrisé par influence; dans ce cas particulier, le problème du magnétisme et celui de l'électricité dans les corps conducteurs dépendront de la résolution d'une même équation; pour toute autre valeur de k, l'équation relative au magnétisme contiendra, comme on voit, un terme qui ne s'y trouverait pas dans le cas de l'électricité.

(22) Si l'on regarde la quantité φ comme une fonction des coordonnées polaires r, θ, ψ, et que l'on substitue dans l'équation (h) ces variables à la place des x, y, z, elle se transformera en celle-ci :

$$r\frac{d^2 . r\varphi}{dr^2}+\frac{d\left(\sin\theta\frac{d\varphi}{d\theta}\right)}{\sin\theta\, d\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\theta}{d\psi^2}=0. \quad (l)$$

Toute fonction des deux angles θ et ψ pouvant être exprimée, comme nous l'avons déjà rappelé (n.° 14), par une série de certaines fonctions de leurs sinus et cosinus, c'est sous cette forme que nous mettrons la valeur de l'inconnue φ; soit

donc

$$\varphi = R_0 + R_1 + R_2 + \ldots + R_i + \&c.;$$

le terme général R_i étant une fonction rationnelle, entière et du degré i, des trois quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\psi$ et $\sin\theta\cos\psi$, dépendante aussi de r, et qui satisfait à l'équation

$$\frac{d\left(\sin\theta\,\frac{dR_i}{d\theta}\right)}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{d^2R_i}{d\psi^2} + i(i+1)R_i = 0. \quad (m)$$

Après avoir substitué cette valeur de φ dans l'équation (l), on obtiendra un résultat de cette forme :

$$R'_0 + R'_1 + R'_2 + \ldots + R'_i + \&c. = 0;$$

R'_i étant la partie de son premier membre qui répond au terme quelconque R_i de notre série. La valeur de R'_i, réduite en vertu de l'équation (m), est

$$R'_i = r\,\frac{d^2.rR_i}{dr^2} - i(i+1)R_i;$$

c'est donc une fonction de θ et ψ, de la même espèce que R_i; et, d'après la nature de ce genre de quantités, chaque terme de la série précédente devra être séparément nulle, pour que la série entière soit égale à zéro. Ainsi nous aurons généralement

$$r\,\frac{d^2.rR_i}{dr^2} - i(i+1)R_i = 0;$$

équation dont l'intégrale complète est

$$R_i = r^i H_i + \frac{1}{r^{i+1}}\,G_i;$$

H_i et G_i étant des quantités indépendantes de r et de la même nature que R_i, eu égard aux deux autres variables θ et ψ.

Il ne restera donc plus qu'à déterminer, dans chaque cas particulier, les expressions de ces deux quantités, en fonctions de leur indice i. On y parviendra en mettant dans le

premier membre de l'équation (k), au lieu de φ, sa valeur précédente, et à la place de V, U, ρ et ρ', leurs valeurs en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances croissantes ou décroissantes de r; on égalera ensuite à zéro la somme des termes qui contiendront la même puissance de r, et l'on formera de cette manière une suite d'équations qui serviront à déterminer les quantités H_i et G_i, pour toutes les valeurs de l'indice i. Lorsqu'il ne restera plus rien d'inconnu dans la valeur de φ, la solution du problème sera complète : car on connaîtra, 1.° la distribution du magnétisme dans l'intérieur de A, d'après les trois quantités α, β, γ (n.° 5), qui sont les différences partielles de φ; 2.° les composantes X, Y, Z de l'action magnétique de ce corps sur un point donné de position, au moyen de la quantité Q, dont la valeur se déduira de celle de φ par des intégrations immédiates.

§. III.

Application des Formules générales aux Corps sphériques.

(23) Supposons que le corps A soit une sphère creuse, qui ait par-tout la même épaisseur. Soient a le rayon de sa surface extérieure, et b celui de sa surface intérieure; en sorte qu'on ait $r' = a$, $r'' = b$, en plaçant au centre de cette sphère l'origine des coordonnées qui entrent dans les formules du paragraphe précédent. On aura aussi, dans la même hypothèse,

$$\cos l' = \frac{x'}{r'}, \cos m' = \frac{y'}{r'}, \cos n' = \frac{z'}{r'}, \cos \varpi' = 1,$$

$$\cos l'' = -\frac{x''}{r''}, \cos m'' = -\frac{y''}{r''}, \cos n'' = -\frac{z''}{r''}, \cos \varpi'' = 1;$$

et il en résultera

$$E' = k\frac{d\varphi'}{dr'}, \quad E'' = -k\frac{d\varphi''}{dr''}; \qquad (1)$$

où l'on devra faire $r' = a$, $r'' = b$, après avoir effectué les différenciations. L'équation (k) se changera donc en celle-ci,

$$\left.\begin{array}{c} V + U + \frac{4\pi(1-k)}{3}\,\varphi \\ + a^2 k \iint \frac{1}{\rho}\,\frac{d\varphi'}{dr'} \sin\theta' d\theta' d\psi' - b^2 k \iint \frac{1}{\rho'}\,\frac{d\varphi''}{dr''} \sin\theta'' d\theta'' d\psi'' = 0, \end{array}\right\} (2)$$

qui devra servir à déterminer les deux séries de coefficiens contenus dans la valeur de φ du numéro précédent.

Dans cette équation, le point M, qui répond aux coordonnées polaires r, θ, ψ, appartenant à la partie pleine de A, il s'ensuit qu'on a $r < a$ et $r > b$; on aura donc, en séries convergentes,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a} + \frac{r}{a^2} Y_1' + \frac{r^2}{a^3} Y_2' + \frac{r^3}{a^4} Y_3' + \&c.,$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r} + \frac{b}{r^2} Y_1'' + \frac{b^2}{r^3} Y_2'' + \frac{b^3}{r^4} Y_3'' + \&c.;$$

les coefficiens de la première série étant des fonctions de θ, ψ, θ', ψ', symétriques, soit par rapport à θ et θ', soit relativement à ψ et ψ', et ceux de la seconde série se déduisant des premiers en y changeant θ' et ψ' en θ'' et ψ''. En vertu des propriétés connues dont ces fonctions jouissent, si l'on désigne par H'_i ce que devient la fonction H_i du numéro précédent, quand on y met θ' et ψ' à la place de θ et ψ, on aura

$$\iint H'_i Y'_{i'} \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' = 0,$$

tant que les indices i et i' seront différens, et

$$\iint H'_i Y'_{i'} \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' = \frac{4\pi H_i}{2i+1},$$

lorsqu'ils seront égaux; les limites des intégrales étant toujours $\theta' = 0$, $\psi' = 0$, et $\theta' = \pi$, $\psi' = 2\pi$. Les mêmes équations auront lieu, en substituant la fonction G_i à H_i; et elles subsisteront également, en intégrant dans les mêmes limites, par rapport aux variables θ'' et ψ''. Il résulte de là

que, si nous combinons l'expression de φ du numéro précédent avec ces valeurs de $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho'}$, nous aurons

$$\iint \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi'}{dr'} \sin\theta' d\theta' d\psi' = \frac{4\pi}{a^2}\left(\frac{r}{3} H_1 + \frac{2r^2}{5} H_2 + \frac{3r^3}{7} H_3 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{ir^i}{2i+1} H_i + \text{\&c.}\right)$$
$$- \frac{4\pi}{a^2}\left(\frac{1}{a} G_0 + \frac{2r}{3a^3} G_1 + \frac{3r^2}{5a^5} G_2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(i+1)r^i}{(2i+1)a^{2i+1}} G_i + \text{\&c.}\right),$$

$$\iint \frac{1}{\rho'} \frac{d\varphi''}{dr''} \sin\theta'' d\theta'' d\psi'' = \frac{4\pi}{r^2}\left(\frac{b}{3} H_1 + \frac{2b^3}{5r} H_2 + \frac{3b^5}{7r^2} H_3 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{ib^{2i-1}}{(2i+1)r^{i-1}} H_i + \text{\&c.}\right)$$
$$- \frac{4\pi}{b^2}\left(\frac{1}{r} G_0 + \frac{2}{3r^2} G_1 + \frac{3}{5r^3} G_2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{i+1}{(2i+1)r^{i+1}} G_i + \text{\&c.}\right);$$

en faisant, comme il a été dit, $r' = a$, $r'' = b$, après les opérations effectuées.

Les quantités U et V se développent aussi suivant les puissances croissantes ou décroissantes de r : mais, d'après la position du point M, dont cette variable est le rayon vecteur, il faudra, pour que ces séries soient convergentes, que V soit développé suivant les puissances croissantes de r, et U suivant ses puissances décroissantes ; car V répond à des forces qui émanent de centres dont les distances au centre de A surpassent r, et, au contraire, U se rapporte à des forces dont les centres d'action sont à des distances de ce point moindres que r. Nous aurons, par conséquent,

$$V = V_0 + r V_1 + r^2 V_2 + r^3 V_3 + \text{\&c.},$$
$$U = \frac{1}{r} U_0 + \frac{1}{r^2} U_1 + \frac{1}{r^3} U_2 + \frac{1}{r^4} U_3 + \text{\&c.};$$

les termes généraux V_i et U_i des coefficiens de ces séries étant des fonctions de θ et ψ, de la même nature que H_i et G_i. A mesure que r augmentera, la valeur de U approchera de se réduire à son premier terme $\frac{1}{r} U_0$: mais, par la nature de cette fonction, sa limite doit être la somme des quantités de fluide libre appartenant aux aimans qu'on a placés dans l'intérieur de A, divisée par r; le coefficient U_0 doit donc être égal à cette somme, laquelle est toujours zéro, quels que soient le nombre et la forme de ces aimans.

Maintenant, si nous substituons ces diverses valeurs et celle de φ du numéro précédent, dans le premier membre de l'équation (2), et que nous égalions séparément à zéro la somme des termes qui sont multipliés par r^i, et celle des termes qui ont $\frac{1}{r^{i+1}}$ pour facteur, nous aurons, pour toutes les valeurs de l'indice i, ces deux équations :

$$\left.\begin{aligned} &V_i + \frac{4\pi(1-k)}{3} H_i + \frac{4\pi i k}{2i+1} H_i - \frac{4\pi(i+1)k}{(2i+1)a^{2i+1}} G_i = 0, \\ &U_i + \frac{4\pi(1-k)}{3} G_i - \frac{4\pi i k b^{2i+1}}{2i+1} H_i + \frac{4\pi(i+1)k}{2i+1} G_i = 0; \end{aligned}\right\} (3)$$

d'où l'on tirera les valeurs de H_i et G_i qu'il s'agissait de déterminer. A cause de $U_0 = 0$, la seconde équation donnera $G_0 = 0$; et pour le même indice $i = 0$, la première se réduira à

$$V_0 + \frac{4\pi(1-k)}{3} H_0 = 0.$$

Les équations (1) feront connaître les épaisseurs E' et E'' des couches de fluide libre, dont les actions, ajoutées l'une à l'autre, sont équivalentes à celle de A sur tous les points non situés dans la partie pleine de ce corps. Par la nature des fonctions H_i et G_i, on aura simplement

$$a^2 \int\int E' \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' = -4\pi k G_0,$$

$$b^2 \int\int E'' \sin\theta'' \, d\theta'' \, d\psi'' = 4\pi k G_0,$$

pour les quantités totales de fluide libre dont ces couches seraient formées ; quantités qui seront nulles, puisqu'on a $G_0 = 0$.

(24) Lorsqu'on voudra se servir de ces valeurs de E' et E'' pour calculer l'action de A sur un point M donné de position, il faudra s'y prendre différemment, selon que ce point sera en dehors de A ou qu'il sera situé dans l'espace vide que ce corps renferme. Si l'on forme la quantité

$$V + U + k a^2 \int\int \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi'}{dr'} \sin\theta' d\theta' d\psi' - k b^2 \int\int \frac{1}{\rho'} \frac{d\varphi''}{dr''} \sin\theta'' d\theta'' d\psi'',$$

que nous appellerons F pour abréger, et dans laquelle on devra faire $r' = a$, $r'' = b$, ses différences partielles par rapport aux coordonnées de M exprimeront, dans les deux cas, les composantes de la force totale qui agit sur ce point, et qui provient soit de l'action de A, soit des forces auxquelles se rapportent les fonctions V et U : mais, selon la position du point M, les différens termes de cette quantité devront se développer suivant les puissances croissantes ou décroissantes de M, afin de satisfaire toujours à la condition de la convergence des séries ; c'est pourquoi nous allons examiner successivement le cas où le point M est en dehors de A, et le cas où il est en dedans.

1.° Si le point M est en dehors de A, de sorte qu'on ait $r > a$, et à plus forte raison $r > b$, le second et le quatrième terme de F devront être développés comme dans l'équation (2), suivant les puissances décroissantes de r ; par conséquent, le coefficient de r^{-i-1}, dans le développement de la somme de ces deux termes, sera équivalent, d'après la seconde équation (3), à

$$- \frac{4\pi(1-k)}{3} G_i;$$

et nous aurons

$$U - k b^2 \int\int \frac{1}{\rho'} \frac{d\varphi''}{dr''} \sin\theta'' \, d\theta'' \, d\psi''$$
$$= - \frac{4\pi(1-k)}{3} \left(\frac{1}{r} G_0 + \frac{1}{r^2} G_1 + \frac{1}{r^3} G_2 + \&c. \right).$$

La quantité $\frac{1}{\rho}$ comprise dans le troisième terme de F devra aussi être développée suivant les puissances descendantes de r; on aura donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} Y_1' + \frac{a^2}{r^2} Y_2' + \frac{a^3}{r^3} Y_3' + \&c.;$$

les coefficiens étant les mêmes que dans le numéro précédent. Il en résultera pour le coefficient de r^{-i-1} dans le développement de ce troisième terme,

$$\frac{4\pi k a^{i+2}}{2i+1} \left(i b^{i-1} H_i - \frac{i+1}{a^{i+2}} G_i \right);$$

quantité égale à

$$- a^{2i+1} \left(V_i + \frac{4\pi(1-k)}{3} H_i \right),$$

en vertu de la première équation (3), et qui s'évanouit pour $i = 0$, d'après l'équation relative à cet indice. Nous aurons donc

$$k a^2 \int\int \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi'}{dr'} \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' = - \left(\frac{a^3}{r^2} V_1 + \frac{a^5}{r^3} V_2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{a^{2i+1}}{r^{i+1}} V_i + \&c. \right) - \frac{4\pi(1-k)}{3} \left(\frac{a^3}{r^2} H_1 + \frac{a^5}{r^3} H_2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{a^{2i+1}}{r^{i+1}} H_i + \&c. \right);$$

et la valeur complète de F, dans le cas où le point M est en dehors de A, sera

$$F = V - \left(\frac{a^3}{r^2} V_1 + \frac{a^5}{r^3} V_2 + \ldots + \frac{a^{2i+1}}{r^{i+1}} V_i + \&c. \right)$$

$$- \frac{4\pi(1-k)}{3} \left[\frac{1}{r^2} (a^3 H_1 + G_1) + \frac{1}{r^3} (a^5 H_2 + G_2) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{r^{2i+1}} (a^{2i+1} H_i + G_i) + \&c. \right].$$

2.° Le point M étant compris dans la partie vide de A, on aura $r < b$ et $< a$. Le premier et le troisième terme de F devront se développer suivant les puissances croissantes de r, comme dans l'équation (2); le coefficient de r^i, dans le développement de leur somme, sera équivalent à

$$- \frac{4\pi(1-k)}{3} H_i,$$

en vertu de la première équation (3); et à cause que ce coefficient est égal à V_0, dans le cas de $i = 0$, on aura

$$V + k a^2 \int\int \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi'}{dr'} \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'$$

$$= V_0 - \frac{4\pi(1-k)}{3} (r H_1 + r^2 H_2 + r^3 H_3 + \&c.).$$

Il faudra aussi développer, suivant les puissances croissantes de r, la quantité $\frac{1}{\rho'}$ contenue dans le quatrième terme de F; on aura donc

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{b} + \frac{r}{b^2} Y_1'' + \frac{r^2}{b^3} Y_2'' + \frac{r^3}{b^4} Y_3'' + \&c.;$$

au moyen de quoi le coefficient de r^i, dans le développement de ce terme, sera

$$- \frac{4\pi k}{(2i+1) b^{i+1}} \left(i \, b^{i-1} H_i - \frac{i+1}{b^{i+2}} G_i \right);$$

quantité qui est la même chose que

$$- \frac{1}{b^{2i+3}} \left(U_i + \frac{4\pi(1-k)}{3} G_i \right),$$

d'après la seconde équation (3); donc, à cause de $U_0 = 0$, $G_0 = 0$, on aura

$$-kb^2 \int\int \frac{1}{\rho'} \frac{d\varphi''}{dr''} \sin\theta''\, d\theta''\, d\psi'' =$$
$$-\left(\frac{r}{b^3}U_1 + \frac{r^2}{b^5}U_2 + \frac{r^3}{b^7}U_3 + \ldots + \frac{r^i}{b^{2i+1}}U_i + \&c.\right)$$
$$-\frac{4\pi(1-k)}{3}\left(\frac{r}{b^3}G_1 + \frac{r^2}{b^5}G_2 + \frac{r^3}{b^7}G_3 + \ldots + \frac{r^{i+1}}{b^{2i+1}}G_i + \&c.\right);$$

et la quantité F, dans le cas où le point M est en dedans de A, aura pour valeur complète,

$$F = V_0 + U - \left(\frac{r}{b^2}U_1 + \frac{r^2}{b^5}U_2 + \frac{r^3}{b^7}U_3 + \ldots + \frac{r^i}{b^{2i+1}}U_i + \&c.\right)$$
$$-\frac{4\pi(1-k)}{3}\left[r\left(H_1 + \frac{1}{b^3}G_1\right) + r^2\left(H_2 + \frac{1}{b^5}G_2\right)\right.$$
$$\left. + r^3\left(H_3 + \frac{1}{b^7}G_3\right) + \ldots + r^i\left(H_i + \frac{1}{b^{2i+1}}G_i\right) + \&c.\right].$$

On a conservé, pour abréger, dans ces expressions générales de F, les lettres H_1, H_2, &c., G_1, G_2, &c., à la place de leurs valeurs déterminées par les équations (3). Les valeurs de F sont maintenant des fonctions de r, θ et ψ, qui contiennent, en outre, des quantités données dans chaque cas particulier. Il ne restera plus qu'à les différencier par rapport aux coordonnées rectangulaires x, y, z du point M, en y regardant r, θ, ψ, comme des fonctions de ces coordonnées, pour en conclure les composantes totales des forces qui agissent sur ce point, suivant leurs directions. Leur origine étant au centre de A, et l'axe des z positives et le plan des x, z, étant l'axe et le plan fixes d'où sont comptés les angles θ et ψ, on aura, dans ces différenciations,

$$z = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad x = r\sin\theta\cos\psi.$$

(25) Dans le cas particulier où l'on a $k = 1$, les valeurs

de F se réduiront, savoir : la valeur relative aux points extérieurs, à

$$F = V - \left(\frac{a^3}{r^2} V_1 + \frac{a^5}{r^3} V_2 + \frac{a^7}{r^4} V_3 + \ldots + \frac{a^{2i+1}}{r^{i+1}} V_i + \&c.\right);$$

et celle qui se rapporte aux points intérieurs, à

$$F = V_0 + U - \left(\frac{r}{b^3} U_1 + \frac{r^2}{b^5} U_2 + \frac{r^3}{b^7} U_3 + \ldots + \frac{r^i}{b^{2i+1}} U_i + \&c.\right).$$

Le terme V_0 étant une constante qui disparaîtra dans les différences partielles de F, on voit que la quantité V et les termes de son développement n'entreront pas dans les valeurs des forces qui agissent sur les points intérieurs, tandis que la fonction U, et les quantités qui en dépendent, n'entreront pas non plus dans les valeurs des forces relatives aux points extérieurs; c'est-à-dire que les forces qui émanent de l'intérieur de A n'agiront point au dehors, et celles qui ont leurs centres au dehors n'agiront point au dedans. On voit aussi que les actions extérieures et intérieures seront indépendantes de l'épaisseur de la partie pleine de A : les actions extérieures dépendront seulement du rayon a de la surface extérieure, et les actions intérieures, du rayon b de la surface intérieure. Mais ces théorèmes remarquables cesseront d'avoir lieu rigoureusement, dès que la quantité k différera de l'unité.

Nous avons remarqué, à la fin du n.° 21, que, dans le cas de l'électricité, on aurait $k = 1$; ces théorèmes conviendront donc aux actions électriques d'une sphère creuse, d'une épaisseur constante, formée d'une matière conductrice de l'électricité, et électrisée par l'influence d'autres corps placés en dehors ou dans son intérieur. Il faudra toutefois que les deux électricités, vitrée et résineuse, soient en quantités égales dans l'intérieur de cette sphère. Si cette condition n'était pas remplie, l'énoncé du théorème relatif aux actions extérieures devrait être modifié : on n'aurait plus alors $U_0 = 0$; cette

quantité U_0 représenterait l'excès de l'une des deux électricités sur l'autre. Pour $i = 0$, les équations (3) donneraient

$$4\pi G_0 = -U_0, \quad \frac{4\pi(1-k)}{3} H_0 = -V_0 - \frac{1}{a} U_0;$$

en sorte que le produit $(1-k) H_0$ ne serait plus nul, quoique l'on ait $k = 1$; ce qui n'est pas impossible, puisque H_0 est une inconnue qui peut dépendre de k, et devenir infinie pour cette valeur particulière. L'expression de F, relative aux points intérieurs, n'en serait pas changée; mais celle qui se rapporte aux points extérieurs devra être augmentée d'un terme,

$$-\frac{a}{r}\left(V_0 + \frac{4\pi(1-k)}{3} H_0\right),$$

équivalent à $\frac{1}{r} U_0$; d'où l'on peut conclure que, dans le cas le plus général, l'action des corps placés dans l'intérieur de A sur un point placé au dehors sera la même que si la totalité des deux électricités qu'ils contiennent, était réunie au centre de A, en sorte qu'elle ne dépendra, ni de la distribution des deux fluides dans ces corps, ni dans la partie pleine de A (*).

(26) Le cas le plus simple, eu égard aux forces magnétiques qui agissent sur A, est celui où l'on ne suppose aucune force intérieure, et où les forces extérieures se réduisent à une seule, constante en grandeur et en direction, dans toute l'étendue de A; ce cas sera aussi le plus propre à la vérification de la théorie par l'expérience : nous allons donc développer en détail les formules qui s'y rapportent; et, pour fixer les idées, nous supposerons que la force constante qui agit sur A, soit l'action magnétique du globe terrestre.

(*) *Voyez*, sur ce point, le *Bulletin de la Société philomathique*, avril 1824.

Soit m son intensité; prenons l'axe des z parallèle à cette force, et dirigé vers le pôle boréal: dans nos climats, la force m tendra à diminuer l'ordonnée z d'une particule de fluide austral, et, ses composantes suivant les axes des x et des y étant nulles, on aura

$$V = -mz,$$

en regardant m comme une quantité positive. A cause de $z = r\cos\theta$, il en résultera

$$V_1 = -m\cos\theta;$$

tous les autres coefficiens du développement de V seront nuls; les coefficiens du développement de U seront aussi nuls, puisqu'il n'y a pas de forces intérieures; d'après cela, les valeurs de H_i et G_i, données par les équations (3), seront égales à zéro pour toutes les valeurs de i, excepté $i = 1$: pour cet indice particulier, on tirera de ces équations:

$$H_1 = \frac{3ma^3(1+k)\cos\theta}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]},$$

$$G_1 = \frac{3ma^3b^3k\cos\theta}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}.$$

Dans le cas que nous examinons, l'expression complète de φ (n.° 22) sera donc

$$\varphi = \frac{3ma^3r\cos\theta}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}\left(1 + k + \frac{kb^3}{r^3}\right);$$

les quantités α, β, γ, qui en sont les différences partielles par rapport à x, y, z (n.° 20), auront pour valeurs:

$$\alpha = -\frac{9mka^3b^3}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}\;\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{r^3},$$

$$\beta = -\frac{9mka^3b^3}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}\;\frac{\cos\theta\sin\theta\sin\psi}{r^3},$$

$$\gamma = \frac{3ma^3}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}\left(1+k+\frac{kb^3}{r^3} - \frac{3kb^3\cos^2\theta}{r^3}\right).$$

Elles feront connaître (n.° 4), au point quelconque de la

partie pleine de A, dont les coordonnées polaires sont r, θ et ψ, la direction de la petite aiguille aimantée dont l'action équivaudrait à celle de l'élément magnétique qui répond au même point, et la quantité de fluide libre correspondante à chacun de ses deux pôles. Si l'on avait $b = 0$, c'est-à-dire si la sphère A était entièrement pleine, cette direction serait constante dans toute son étendue, et la même que celle du magnétisme terrestre; mais, quand le rayon b ne sera pas nul, les lignes d'aimantation seront des lignes courbes, dont la direction en un point donné dépendra des deux rayons a et b, et de la quantité k. Cette disposition du magnétisme, dans l'épaisseur d'une sphère creuse, est une conséquence de la théorie qui n'est pas de nature à pouvoir se vérifier par l'expérience.

(27) En substituant dans l'expression de F, relative à un point M extérieur, les valeurs précédentes de V, $V_{,}$, $H_{,}$, $G_{,}$, et supprimant tous les autres termes, on aura

$$F = -mr\cos\theta + \frac{m(a^3-b^3)k(1+k)}{(1+k)a^3-2k^2b^3}\,\frac{a^3\cos\theta}{r^2};$$

les forces totales qui agiront sur ce point, suivant les axes des x, y, z, seront donc

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{3m(a^3-b^3)k(1+k)}{(1+k)a^3-2k^2b^3}\,\frac{a^3\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{r^3},$$

$$\frac{dF}{dy} = -\frac{3m(a^3-b^3)k(1+k)}{(1+k)a^3-2k^2b^3}\,\frac{a^3\cos\theta\sin\theta\sin\psi}{r^3},$$

$$\frac{dF}{dz} = -m + \frac{m(a^3-b^3)k(1+k)}{(1+k)a^3-2k^2b^3}\,\frac{a^3(1-3\cos^2\theta)}{r^3}.$$

Leur résultante sera comprise dans le plan du rayon vecteur r et de l'axe des z, comme cela doit être; elle sera parallèle à cet axe, ou à la direction du magnétisme terrestre, dans deux cas particuliers : lorsque le point M sera situé dans l'axe

des z, et quand il sera compris dans le plan perpendiculaire à cet axe, mené par le centre de A : mais elle ne se réduira, dans aucun cas, à la seule action de la terre, et il n'y aura aucune position de M dans laquelle A n'exerce une action sur ce point.

La seconde valeur de F, du n.° 24, qui se rapporte aux points intérieurs, deviendra

$$F = -\frac{m(1+k-2k^2)a^3 r\cos\theta}{(1+k)a^3 - 2k^2.b^3}.$$

Les forces parallèles aux axes des x et y seront nulles; la force totale qui agira sur chacun de ces points, sera donc parallèle à la direction du magnétisme terrestre : son intensité sera constante dans tout l'espace vide que A renferme, et elle aura pour valeur :

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{m(1+k-2k^2)a^3}{(1+k)a^3 - 2k^2 b^3}.$$

Ainsi une petite aiguille aimantée, placée dans cet espace, qui ne réagirait pas sensiblement sur la partie pleine de A, conserverait par-tout la direction naturelle de la boussole; mais, k étant < 1 et $b < a$, la force qui la sollicite sera toujours moindre que m, et par conséquent ses oscillations seront ralenties par l'action de A. L'observation exacte de leur durée, si elle était possible, serait le moyen le plus direct de déterminer la valeur de k pour la matière dont A est formé.

Si l'on avait $k = 1$, la force relative aux points intérieurs serait nulle, et la petite aiguille dont nous parlons n'affecterait nulle part une direction déterminée; en même temps les composantes de l'action extérieure deviendraient indépendantes du rayon b de l'espace intérieur, conformément à ce que l'on a dit plus haut (n.° 25). On peut aussi observer que, dans ce cas, la résultante de ces forces serait égale à zéro, pour un point M placé à la surface de A, et dans le plan mené par

son centre, perpendiculairement à la direction du magnétisme terrestre, ou à l'axe des z; car les trois composantes de cette force s'évanouissent à-la-fois, quand on a $k = 1$, $r = a$ et $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Une très-petite aiguille aimantée, dont la réaction sur A serait insensible, et qui serait placée dans ce plan à une très-petite distance de la surface de A, se comporterait donc comme dans l'espace intérieur, c'est-à-dire qu'elle ne prendrait aucune direction particulière.

(28) Nous examinerons spécialement le cas où la sphère A est entièrement pleine, et nous ferons, en conséquence, $b = 0$ dans les valeurs des forces relatives aux points extérieurs; ce qui les réduira à

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{3mka^3 \cos\theta \sin\theta \cos\psi}{r^3},$$
$$\frac{dF}{dy} = -\frac{3mka^3 \cos\theta \sin\theta \sin\psi}{r^3},$$
$$\frac{dF}{dz} = -m + \frac{mka^3(1 - 3\cos^2\theta)}{r^3}.$$

Il ne sera pas inutile, au reste, de remarquer que l'on reviendra, si l'on veut, de ces formules particulières, à celles qui se rapportent à une valeur quelconque de b, en y remplaçant k par la quantité

$$\frac{(a^3 - b^3)k(1+k)}{(1+k)a^3 - 2b^3k^2}.$$

Menons par le centre de A deux plans, l'un horizontal et l'autre perpendiculaire à la direction du magnétisme terrestre. Leur intersection sera la ligne qui va de l'*est* à l'*ouest* magnétiques; nous prendrons la partie de cette droite qui est dirigée vers l'est, pour l'axe des x, à partir duquel l'angle ψ sera compté dans le second plan; celui des y, z représentera le méridien magnétique, et son intersection avec le premier

plan sera la direction naturelle de la boussole horizontale. Désignons par c l'angle compris entre l'axe des z et la verticale menée par le centre de A et dirigée vers le zénith, lequel angle sera le complément de *l'inclinaison* magnétique. Soit u l'angle que fait le rayon vecteur r du point M avec la même verticale, et v l'angle compris entre la projection de ce rayon sur le plan horizontal et l'axe des x; de manière que r, u et v soient aussi les coordonnées polaires du point M. Les angles u et v seront liés aux angles θ et ψ par les équations :

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \cos u \cos c + \sin u \sin c \sin v, \\ \cos u &= \cos\theta \cos c - \sin\theta \sin c \sin\psi, \\ \cos v \sin u &= \cos\psi \sin\theta, \end{aligned}\right\} (4)$$

dont la troisième est la suite des deux autres : elles nous sont fournies par la considération du triangle sphérique, dont les trois sommets répondent au zénith, au pôle magnétique boréal et au point M, et dans lequel θ, u et c sont les trois côtés, et $\frac{1}{2}\pi - v$, $\frac{1}{2}\pi + \psi$, les angles opposés à θ et à u.

Appelons encore ζ la composante verticale de la force qui agit sur le point M; et désignons par ζ' et ζ'' ses composantes horizontales, dont la seconde soit parallèle à l'axe des x, et par conséquent égale à $\frac{dF}{dx}$; nous aurons

$$\zeta = -m\cos c + mk(\cos c(1 - 3\cos^2\theta) + 3\sin c\cos\theta\sin\theta\sin\psi)\frac{a^3}{r^3},$$

$$\zeta' = -m\sin c + mk(\sin c(1 - 3\cos^2\theta) - 3\cos c\cos\theta\sin\theta\sin\psi)\frac{a^3}{r^3},$$

$$\zeta'' = -\frac{3mka^3\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{r^3}.$$

La résultante des deux forces horizontales fera, avec la direction de ζ', un angle δ dont la tangente sera

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\zeta''}{\zeta'};$$

et la résultante de cette force et de la composante verticale fera avec la verticale un angle γ, tel qu'on aura

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{\sqrt{\zeta'^2 + \zeta''^2}}{\zeta}.$$

Cela posé, si le point M appartient à une aiguille aimantée, dont la longueur soit très-petite par rapport à sa distance au centre de A, les quantités r, θ et ψ ne varieront pas sensiblement dans toute son étendue, et les forces ζ, ζ', ζ'' pourront être regardées comme constantes. Si cette aiguille est librement suspendue par son centre de gravité, elle se dirigera, dans sa position d'équilibre, suivant leur résultante; par conséquent, γ sera l'angle qu'elle fera avec la verticale, ou le complément de l'inclinaison magnétique, modifiée par l'action de A, et δ l'angle compris entre sa projection horizontale et le méridien magnétique : son pôle nord s'approchera de l'est ou de l'ouest, selon que la valeur de δ sera positive ou négative. Quand il s'agira d'une aiguille horizontale dans sa direction naturelle, comme l'aiguille d'une boussole ordinaire, l'angle δ exprimera encore la quantité dont elle déviera horizontalement, en vertu de l'action de A; de plus, elle s'inclinera en vertu de cette même action : mais, pour calculer, dans ce cas, l'inclinaison qu'elle prendra, il faudra tenir compte du poids qui la maintient horizontale dans sa direction naturelle, et l'ajouter à la composante ζ. Ce poids devra être égal à $m \cos c$; en sorte que, si l'on représente par i le complément de l'inclinaison demandée, on aura

$$\text{tang}\,i = \frac{\sqrt{\zeta'^2 + \zeta''^2}}{\zeta + m \cos c}.$$

Si l'on désigne le nombre d'oscillations qu'une même aiguille

horizontale effectue dans l'unité de temps, par n, quand elle n'est point influencée par l'action de A, et par n', lorsqu'elle est soumise à son influence, les carrés de ces nombres n' et n seront entre eux en raison directe des forces correspondantes; et comme ces forces sont la résultante de ζ' et ζ'', et la composante horizontale $-m \sin c$ de l'action de la terre, on aura

$$n^4 (\zeta'^2 + \zeta''^2) = n'^4 m^2 \sin^2 c.$$

On formera de même une équation relative aux oscillations de l'aiguille d'inclinaison dans chaque *azimut* particulier. Ce sont ces diverses formules relatives aux oscillations et à la déviation des aiguilles horizontales ou inclinées, qu'il faudrait pouvoir comparer à l'expérience pour vérifier la théorie du magnétisme.

(29) En substituant les valeurs de ζ' et ζ'' dans celle de tang δ, on aura

$$\text{tang}\,\delta = \frac{3ka^3 \cos\theta \sin\theta \cos\psi}{r^3 \sin c - ka^3[\sin c(1-3\cos^2\theta) - 3\cos c \cos\theta \sin\theta \sin\psi]}; \quad (5)$$

formule équivalente, en vertu des équations (4), à celle-ci :

$$\text{tang}\,\delta = \frac{3ka^3 \cos\theta \sin u \cos v}{r^3 \sin c - ka^3(\sin c - 3\cos\theta \sin u \sin v)}, \quad (6)$$

de sorte qu'en y mettant, à la place de cos θ, sa valeur donnée par la première équation (4), tang δ se trouvera exprimée en fonction des angles u et v.

La déviation δ sera nulle quand l'aiguille sera située dans le plan du méridien magnétique, passant par le centre de A, plan pour lequel on a $\psi = \frac{1}{2}\pi$; elle sera égale et de signe contraire, à égale distance, à l'est et à l'ouest de ce plan, c'est-à-dire, pour des valeurs de ψ, dont la somme est égale à π. Concevons qu'on ait mené par le même centre quatre

autres plans perpendiculaires à celui du méridien magnétique et qui le coupent, conséquemment, suivant la ligne est-ouest ; dont le premier soit perpendiculaire à la direction du magnétisme terrestre, le second, parallèle à cette direction, le troisième, horizontal, et le quatrième, vertical. Pour le premier de ces quatre plans, on aura $\theta = \frac{1}{2}\pi$, et la déviation δ sera nulle en tous ses points comme dans le plan du méridien. Pour le second on aura $\psi = 0$ ou $\psi = \pi$, selon que l'aiguille sera à l'est ou à l'ouest du méridien : nous supposerons que ce soit le premier cas qui ait lieu, et alors nous aurons

$$\tang \delta = \frac{3ka^3 \cos\theta \sin\theta}{[r^3 - ka^3(1 - 3\cos^2\theta)]\sin c}. \qquad (7)$$

Relativement au troisième plan, on aura $u = \frac{1}{2}\pi$, $\cos\theta = \sin c \sin v$, et, par conséquent,

$$\tang \delta = \frac{3ka^3 \cos v \sin v}{r^3 - ka^3(1 - 3\sin^2 v)}. \qquad (8)$$

Enfin, par rapport au quatrième plan, nous aurons $v = 0$, en supposant, pour fixer les idées, l'aiguille à l'est du méridien ; la première équation (4) se réduira à $\cos\theta = \cos u \cos c$, et il en résultera

$$\tang \delta = \frac{3ka^3 \cos u \sin u}{(r^3 - ka^3)\tang c}. \qquad (9)$$

En comparant entre elles les formules (7) et (8), on voit que si l'on considère, dans les plans auxquels elles répondent, des positions de l'aiguille également éloignées de la ligne est-ouest, et pour lesquelles on ait, par conséquent, $\theta = \frac{1}{2}\pi - v$, les tangentes des déviations correspondantes seront entre elles dans le rapport constant de l'unité à $\sin c$.

Observons encore que, quelle que soit la position de la petite aiguille, lorsque sa distance r au centre de A sera très-grande par rapport au rayon a de cette sphère, tang δ sera, à très-peu près, proportionnelle au cube de la fraction $\frac{a}{r}$, et à la quantité k dépendante de la matière de A.

(30) La longueur de l'aiguille aimantée à laquelle on appliquera les formules que nous venons d'écrire, donnera lieu à une correction de ces formules dont il pourra être nécessaire de tenir compte. Nous supposerons qu'il s'agisse d'une aiguille horizontale dans sa direction naturelle : on calculera semblablement la correction relative aux aiguilles d'inclinaison. Soit $2\,l$ sa longueur; désignons, comme précédemment, par δ et i, la déviation horizontale et le complément de l'inclinaison qu'elle prendra, en vertu de l'action de A; supposons que les coordonnées polaires r, θ et ψ répondent à son milieu, et soient $r_{,}$, $\theta_{,}$ et $\psi_{,}$, celles de son extrémité boréale : nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
\cos\theta_{,} &= \frac{r\cos\theta + l\cos i}{r_{,}}, \\
\sin\theta_{,}\sin\psi_{,} &= \frac{r\sin\theta\sin\psi + l\sin i\cos\delta}{r_{,}}, \\
\sin\theta_{,}\cos\psi_{,} &= \frac{r\sin\theta\cos\psi + l\sin i\sin\delta}{r_{,}}, \\
r_{,}^{2} &= r^{2} + 2\,rl[\cos\theta\cos i + \sin\theta\sin i\sin(\delta + \psi)] + l^{2}.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

On obtiendra les composantes de la force totale qui agit en ce point, en mettant $r_{,}$, $\theta_{,}$ et $\psi_{,}$, à la place de r, θ et ψ, dans les expressions de ζ, ζ', ζ''; et si l'on y change ensuite le signe de l, on aura les composantes de la force appliquée à l'autre extrémité de l'aiguille. Comme il ne s'agit ici que d'un calcul d'approximation, on pourra prendre ces deux points

extrêmes pour les deux pôles où le fluide libre est censé réuni; alors on aura

$$\tang \delta = \frac{\zeta_{,}''}{\zeta_{,}'} ;$$

$\zeta_{,}'$ et $\zeta_{,}''$ étant les demi-sommes de ce que deviennent respectivement ζ' et ζ'' aux deux extrémités de l'aiguille.

Nous négligerons, dans le calcul de leurs valeurs, la quatrième puissance du rapport de l à r, et le produit de son carré par le carré du rapport de a^3 à r^3; d'où il résulte que nous négligerons aussi les termes qui auront $\frac{a^3 l^2}{r^5} \cos i$ pour facteur, attendu que l'angle i, déterminé dans le n.° 28, est tel, que son cosinus est une quantité de l'ordre de $\frac{a^3}{r^3}$. De cette manière, on trouvera que la valeur de tang δ pourra s'écrire ainsi :

$$\tang \delta = \frac{\zeta''}{\zeta'} (1 - \Delta),$$

en faisant, pour abréger,

$$\Delta = \frac{5 l^2}{2 r^2} [2 - \cos 2\delta + \sin 2\delta \tang \psi - 7 \sin^2 \theta \sin^2 (\delta + \psi)].$$

Pour tenir compte de cette correction, on calculera d'abord l'angle δ sans y avoir égard, c'est-à-dire, en prenant $\frac{\zeta''}{\zeta'}$ pour sa tangente; puis on se servira de cette première valeur approchée, pour calculer la valeur de Δ; et enfin on multipliera la première valeur de tang δ par la quantité $1 - \Delta$, ce qui donnera la valeur corrigée de cette tangente.

(31) Il y aura encore une autre correction qu'on pourra faire subir à la valeur de l'angle δ; c'est celle qui dépend de

l'action exercée par l'aiguille aimantée sur la sphère A. Pour en calculer l'effet, il faut considérer les deux pôles comme des centres de forces extérieures que l'on comprendra dans la fonction V du n.° 10. Nous supposerons donc qu'il y ait au dehors de A une aiguille horizontale dont la position soit connue, ainsi que l'action plus ou moins énergique de chacun de ses pôles, et nous ferons ensuite coïncider cette aiguille avec celle dont on veut déterminer la déviation produite par l'action de A.

Désignons par $r_{\prime}$, $\theta_{\prime}$ et $\psi_{\prime}$ les coordonnées du pôle boréal de l'aiguille qui agit sur A, rapportées aux centres de cette sphère, et par $p\, m\, h^2$, l'action de ce pôle à une distance donnée h; m étant, comme précédemment, la constante relative à l'action de la terre, et p, une autre constante positive, qui dépendra de la quantité de fluide libre appartenant à ce pôle. L'action du pôle austral, à la même distance h, devra s'exprimer par $-p\, m\, h^2$; si, de plus, on désigne par r_2, θ_2 et ψ_2, ses coordonnées polaires, la valeur de V relative aux actions réunies de ces deux pôles sur le point de A qui répond aux coordonnées quelconques r, θ et ψ, sera

$$V = \frac{p\, m\, h^2}{[r_{\prime}^2 - 2r_{\prime}r(\cos\theta_{\prime}\cos\theta + \sin\theta_{\prime}\sin\theta\cos(\psi_{\prime} - \psi)) + r^2]^{\frac{1}{2}}}$$
$$- \frac{p\, m\, h^2}{[r_2^2 - 2r_2 r(\cos\theta_2\cos\theta + \sin\theta_2\sin\theta\cos(\psi_2 - \psi)) + r^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Afin de ne pas trop compliquer les calculs, nous supposerons que l'aiguille soit à une distance de A telle, que l'on puisse négliger le carré et les puissances supérieures de $\frac{r}{r_1}$ et $\frac{r}{r_2}$: nous aurons alors simplement

$$V = V_0 + r\, V_1\,;$$

et les valeurs de V_0 et V_1 seront

$$V_0 = p\,m\,h^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

$$V_1 = p\,m\,h^2\left[\left(\frac{\cos\theta_1}{r^2_1} - \frac{\cos\theta_2}{r^2_2}\right)\cos\theta + \left(\frac{\sin\theta_1\sin\psi_1}{r^2_1}\right.\right.$$
$$\left.- \frac{\sin\theta_2\sin\psi_2}{r^2_2}\right)\sin\theta\sin\psi + \left(\frac{\sin\theta_1\cos\psi_1}{r^2_1}\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\sin\theta_2\cos\psi_2}{r_2^2}\right)\sin\theta\cos\psi\right].$$

A raison de cette valeur de V, la quantité F du n.° 24 renfermera, dans le cas de $b = 0$, une partie

$$V_0 + r\,V_1 - \frac{k\,a^3}{r^2}\,V_1;$$

d'où il résultera une partie correspondante dans chacune des trois forces ζ, ζ', ζ''. Par exemple, dans la troisième, cette partie sera

$$p\,m\,h^2\left(\frac{\sin\theta_1\cos\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2\cos\psi_2}{r^2_2}\right) + \frac{3\,k\,a^3\sin\theta\cos\psi}{r^3}\,V_1$$
$$- \frac{p\,m\,h^2\,k\,a^3}{r^3}\left(\frac{\sin\theta_1\cos\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2\cos\psi_2}{r^2_2}\right).$$

Le terme indépendant de a exprimera l'action directe des deux pôles de l'aiguille sur le point dont les coordonnées sont r, θ et ψ; les deux termes qui ont $k\,a^3$ pour facteur, représenteront l'action de A sur ce même point, supposé en dehors de A : or, si nous appliquons maintenant cette force à l'aiguille même qui l'a produite, nous devrons faire abstraction du premier terme; donc, en désignant par ζ''_1, ce que devient la composante ζ'' quand on tient compte de la correction due à l'action de cette aiguille sur A, on aura

$$\zeta''_1 = \zeta'' + \frac{3pmh^2ka^3\sin\theta\cos\psi}{r^3}\Big[\Big(\frac{\cos\theta_1}{r^2_1} - \frac{\cos\theta_2}{r^2_2}\Big)\cos\theta$$
$$+ \Big(\frac{\sin\theta_1\sin\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2\sin\psi_2}{r_2^2}\Big)\sin\theta\sin\psi$$
$$+ \Big(\frac{\sin\theta_1\cos\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2\cos\psi_2}{r^2_2}\Big)\sin\theta\cos\psi\Big]$$
$$- \frac{pmh^2ka^3}{r^3}\Big(\frac{\sin\theta_1\cos\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2\cos\psi_2}{r^2_2}\Big).$$

Il y faudra mettre à la place de r_1, θ_1 et ψ_1, leurs valeurs tirées des équations (10) du numéro précédent, et au lieu de r_2, θ_2 et ψ_2, ce que deviennent ces valeurs quand on y change le signe de l: en négligeant le cube de $\frac{l}{r}$, et regardant, comme dans ce numéro, l'angle i comme droit, on trouve, toute réduction faite,

$$\zeta''_1 = \zeta'' - \frac{2pmh^2ka^3l}{r^6}\,(3\sin^2\theta\cos\psi\sin(\delta+\psi) + \sin\delta).$$

On formerait de même la valeur corrigée de ζ'; mais on n'aura pas besoin de la connaître pour avoir celle de tang δ, si l'on néglige dans celle-ci le produit de la correction par le carré de $\frac{a^3}{r^3}$: on aura alors simplement

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\zeta''_1}{\zeta'}, \qquad (11)$$

où il suffira de mettre pour ζ' sa valeur non corrigée; ce qui donnera

$$\text{tang}\,\delta = \frac{ka^3\Big[3\sin\theta\cos\theta\cos\psi + \frac{6ph^2l}{r^3}\sin^2\theta\cos\psi\sin(\delta+\psi) + \frac{2ph^2l}{r^3}\sin\delta\Big]}{r^3\sin c - ka^3\,[\sin c(1 - 3\cos^2\theta) - 3\cos c\sin\theta\cos\theta\sin\psi]}.$$

On déterminera la valeur de p, relative à l'aiguille dont on fera usage, par différens moyens faciles à imaginer. Par exemple, si l'on place dans le prolongement de l'aiguille donnée, à une distance h de son milieu, et du côté de son

pôle boréal, une autre petite aiguille horizontale, dont la réaction sur la première soit insensible, et si l'on suppose la distance h assez grande par rapport à l, pour qu'on puisse négliger le cube de $\frac{l}{h}$, l'action de l'aiguille donnée sur un point quelconque de la petite aiguille sera égale à $\frac{4pml}{h}$; elle s'ajoutera à la composante horizontale $m \sin c$ de l'action de la terre : par conséquent, si l'on désigne par n le nombre d'oscillations que la petite aiguille fait en vertu de cette dernière action, et par n' le nombre qu'elle exécute en vertu des deux forces réunies, les carrés de ces nombres seront en raison directe des forces correspondantes $m \sin c$ et $m \sin c + \frac{4pml}{h}$; en sorte que l'on aura

$$n^2 \left(\sin c + \frac{4pl}{h}\right) = n'^2 \sin c; \qquad (12)$$

d'où l'on tirera la valeur de $\frac{pl}{h}$. Mais, dans les expériences qu'on pourra faire par la suite sur la déviation des aiguilles aimantées, il vaudra mieux, pour simplifier les calculs et diminuer les chances d'erreur, employer des aiguilles d'un très-petit diamètre, dont la réaction sur le corps qui les fait dévier, soit sensiblement nulle.

(32) M. Barlow, professeur à Woolwich, a publié, l'an dernier, un ouvrage sur le magnétisme (*), dans lequel on trouve les résultats d'un grand nombre d'expériences qu'il a faites sur les déviations de la boussole produites par l'influence d'une sphère pleine ou creuse, aimantée par l'action du globe terrestre. Ayant successivement soumis la même aiguille à l'action de deux sphères de dix pouces anglais de diamètre,

(*) *An Essay on magnetic attractions*, second edition; London, 1823.

formées de la même matière, l'une entièrement pleine, et l'autre creuse, et celle-ci pesant les trois quarts de la première, il a reconnu que, dans la même position, la déviation de l'aiguille était égale pour ces deux corps; il a ensuite vérifié que cette égalité, à laquelle il était loin de s'être attendu, subsistait pour des sphères pleines ou creuses de même surface, tant que l'épaisseur des sphères creuses surpassait une certaine limite qu'il a fixée à un trentième de pouce; et à cette limite il a trouvé que la déviation de l'aiguille produite par la sphère creuse de dix pouces de diamètre était réduite aux deux tiers, à peu près, de la déviation correspondante à une sphère pleine de même dimension. M. Barlow a cru pouvoir conclure de ce fait important, que le magnétisme résidait à la surface des corps aimantés, ou que, du moins, il ne pénétrait pas dans leur intérieur, au-delà de la limite que nous venons de citer. Mais cette conclusion ne résulte pas nécessairement du fait observé : elle prouve seulement que, dans la matière des sphères que M. Barlow a employées, la quantité que nous avons désignée précédemment par k, est très-peu différente de l'unité. Si elle était rigoureusement égale à un, l'action de la sphère creuse serait la même que celle de la sphère pleine, quelque petite que fût son épaisseur (n.° 25); mais, si k diffère un tant soit peu de l'unité, il y aura toujours une épaisseur assez petite pour que la déviation produite par la sphère pleine soit à la déviation due à la sphère creuse, dans tel rapport que l'on voudra. En effet, ces déviations sont à peu près entre elles comme k est à la fraction

$$\frac{(a^3-b^3)(1+k)k}{a^3(1+k)-2k^2b^3},$$

par laquelle on doit remplacer cette quantité, dans le cas de la sphère creuse dont l'épaisseur est $a-b$, et le rayon extérieur égal à a (n.° 28); or, si l'on veut, par exemple, que la déviation produite par la sphère creuse soit les deux tiers de

l'autre déviation, quand on a $a - b = \frac{a}{150}$, comme M. Barlow l'a observé, il suffira de supposer qu'on ait à peu près $k = 1 - \frac{1}{50}$. Pour cette valeur de k, les déviations produites, soit par la sphère creuse, soit par la sphère pleine, ne diffèrent l'une de l'autre que d'environ un centième, quand le volume de l'une est les trois quarts de celui de l'autre, ou quand on a $a^3 - b^3 = \frac{3}{4} a^3$, en sorte qu'on a pu croire qu'elles étaient les mêmes dans les deux cas.

Les sphères dont M. Barlow a fait usage, étaient formées d'une espèce de fer fondu, dans lequel la force coercitive avait apparemment peu d'intensité; car l'ensemble des expériences ne paraît pas indiquer que ces corps eussent acquis un degré notable de magnétisme fixe. L'aiguille de boussole qu'il a soumise à leur action, avait six pouces anglais en longueur; et quoique l'auteur ne fasse pas connaître la mesure exacte de l'intensité magnétique de ses pôles, il dit cependant que leur puissance était très-énergique. Nous ne pouvons donc pas négliger, dans le calcul des déviations de cette aiguille, les corrections dues à sa longueur et à sa réaction sur la sphère aimantée, sur-tout dans les cas où l'aiguille a été le plus rapprochée de la sphère, et où la distance de son milieu au centre de ce corps n'était que de douze pouces, c'est-à-dire, seulement quadruple de sa demi-longueur. A la vérité, M. Barlow annonce qu'ayant placé successivement dans le même point le milieu de l'aiguille de six pouces, et celui d'une petite aiguille d'un demi-pouce en longueur, il n'a pas observé de différence entre leurs déviations; ce qui ferait penser que les deux corrections dont nous parlons, dont l'une a pour effet d'augmenter la déviation, et l'autre, de la diminuer, se seraient à peu près compensées. Mais nous avons lieu de croire que

cette compensation a été très-imparfaite; car, en calculant les déviations de l'aiguille, sans avoir égard à la double correction due à sa longueur et à sa force magnétique, les différences que l'on trouve entre le calcul et l'expérience, sont trop grandes pour être attribuées en entier aux erreurs des observations.

(33) Pour en donner un exemple, prenons cette expérience de M. Barlow : le milieu de l'aiguille était placé dans le plan qui répond à $\psi = 0$, et auquel se rapporte l'équation (7) du n.° 29; on avait $\theta = 46° 38'$, le rayon a de la sphère $= 6^p,4$ (*), la distance r du milieu de l'aiguille à son centre $= 12^p$, l'angle c ou le complément de l'inclinaison magnétique $= 19° 30'$; en substituant ces valeurs dans l'équation (7), et faisant $k = 1$, ce qui est la plus grande valeur qu'on puisse supposer à cette quantité, on trouve $\delta = 32° 38'$: or M. Barlow a trouvé cette même déviation égale à $36° 15'$, l'aiguille étant placée, soit à l'est, soit à l'ouest du méridien magnétique. La différence entre ces deux valeurs de δ, qui s'élève à $3° 37'$, ne saurait être due en entier aux erreurs de l'observation. On ne peut pas non plus l'attribuer à une erreur dans l'évaluation de l'angle θ; car, cet angle étant peu différent de 45°, il faudrait le faire varier de plusieurs degrés, pour produire un seul degré de variation dans l'angle δ, qui est alors très-près de son *maximum*. Il y a donc lieu de penser qu'elle est due, en grande partie, à la longueur et à la réaction de l'aiguille, dont on n'a pas tenu compte dans le calcul; mais, pour effectuer la correction relative à la réaction de l'aiguille, il serait nécessaire de connaître la valeur de la quantité p, qui se rapporte à la boussole employée dans l'expérience,

(*) Toutes les longueurs que nous citons d'après M. Barlow, sont exprimées en pouces anglais.

laquelle quantité est comprise dans le second membre de l'équation (11), ou dans la valeur corrigée de tang δ.

Cette valeur de p ne nous étant pas donnée, on pourrait réciproquement essayer de la déduire de l'équation (11), en y mettant pour δ la déviation observée : si l'on a égard en même temps à la correction indiquée dans le n.° 30, on trouve que, pour satisfaire à cette équation, en faisant $\delta = 36° 15'$, et supposant toujours $k = 1$, $a = 6$, $r = 12$, $l = 3$, $\theta = 46° 38'$, $\psi = 0$, il faudrait qu'on eût $p = 0{,}436$, la distance arbitraire h étant quadruple de l, ou égale à un pied anglais. Pour ces valeurs de p et de h, le rapport des nombres d'oscillations n' et n du n.° 31 serait égal à 1,52 ; en sorte que l'action de la boussole devrait être telle, qu'à un pied de distance de son milieu, elle fût capable d'augmenter la vîtesse d'une petite aiguille oscillante, dans le rapport de 3 à 2 à peu près; ce qui ne serait aucunement invraisemblable. Mais, en employant d'autres expériences de M. Barlow pour déterminer cette quantité p, on trouve des valeurs très-inégales, et quelquefois doubles ou triples de la précédente; d'où l'on doit conclure que le degré d'exactitude de ces observations n'est pas assez grand, pour qu'elles puissent servir à évaluer la quantité p, non plus que la quantité qui paraît devoir être très-petite, dont la valeur de k est moindre que l'unité : on y parviendrait peut-être par la méthode des équations de conditions, en employant à-la-fois toutes ces observations; ce qui exigerait de très-longs calculs, que je n'ai pas dessein d'entreprendre.

Relativement aux expériences du même physicien, où la distance du milieu de l'aiguille au centre de la sphère a été de quinze pouces et au-delà, les déviations calculées, en faisant abstraction de la longueur et de la force de l'aiguille, et supposant $k = 1$, sont toujours plus petites que les déviations observées, et elles en diffèrent souvent d'un degré et quelques

minutes. Ces différences constamment de même signe ne sont pas dues aux erreurs des observations ; néanmoins elles ne s'observent que dans la comparaison des grandeurs absolues des déviations : les lois de variation que les déviations suivent dans le changement de position des aiguilles, s'accordent entre elles, soit qu'on les déduise de la théorie, soit qu'on les conclue de l'observation ; et en cela, les nombreuses observations de M. Barlow sont une confirmation remarquable de la théorie du magnétisme qui fait l'objet de ce Mémoire.

(34) Nous terminerons par une remarque qui ne sera pas sans utilité dans la pratique. Les formules relatives aux déviations des aiguilles horizontales et à la durée de leurs oscillations, en présence d'une sphère aimantée par l'action de la terre, renferment explicitement l'angle c qui exprime le complément de l'inclinaison magnétique, dans le lieu et à l'instant de l'observation : si donc la déviation d'une aiguille de boussole ordinaire, ou le nombre de ses oscillations dans l'unité de temps, nous était donné par l'expérience, ces formules pourraient servir réciproquement à déterminer l'angle c, de manière que la direction de l'aiguille d'inclinaison se trouverait déduite de la seule observation de l'aiguille horizontale ; ce qui pourrait être préférable à l'observation directe de cette inclinaison.

Pour fixer les idées, supposons qu'on veuille employer à cet usage l'observation des angles de déviation horizontale. En mettant dans l'équation (6), à la place de $\cos\theta$, sa valeur, et la résolvant par rapport à $\tang c$, on en conclut

$$\text{tang}\, c = \frac{\frac{3ka^3}{r^3}\left(\frac{\cos v}{\text{tang}\,\delta} - \sin v\right)\sin u \cos u}{1 - \frac{ka^3}{r^3} - \frac{3ka^3}{r^3}\left(\frac{\cos v}{\text{tang}\,\delta} - \sin v\right)\sin^2 u \sin v}.$$

Lors donc que l'on connaîtra le rapport $\frac{a}{r}$ du rayon a de la sphère à la distance du milieu de l'aiguille à son centre, l'angle u que la droite qui joint ces deux points fait avec la verticale, l'angle v compris entre la projection horizontale de cette ligne et la perpendiculaire à la direction naturelle de la boussole horizontale, l'angle δ compris entre cette direction naturelle et la direction déviée par l'action de la sphère, et enfin la quantité k relative à la matière de la sphère, cette formule donnera immédiatement l'angle c. Il faudra que la sphère soit en fer forgé, afin que la force coërcitive soit nulle, comme le suppose cette formule. On placera le milieu de l'aiguille horizontale aussi près que l'on pourra du plan vertical, mené par le centre de cette sphère, et de manière que l'angle u diffère peu de $45°$: ce sera la position dans laquelle une erreur sur la mesure des angles u et v aura le moins d'influence sur la valeur calculée de l'angle c. L'aiguille horizontale devra être d'un très-petit diamètre, afin qu'elle ne réagisse pas sensiblement sur la sphère qui la fait dévier. Quant à sa longueur, on aura facilement égard à la correction à laquelle elle donne lieu, en mettant, dans la formule précédente, à la place de tang δ, la tangente de l'angle δ observé, divisée par $1 - \Delta$. Il est vrai que la valeur de Δ, donnée dans le n.° 30, contient implicitement l'angle c qu'on veut déterminer; mais il suffira d'avoir une valeur approchée de cet angle, pour calculer celle de la quantité Δ.

La formule précédente sera sur-tout très-utile pour faire découvrir les variations diurnes de l'aiguille d'inclinaison, s'il en existe. En effet, supposons que l'on ait observé à deux instans différens la déviation de l'aiguille horizontale, produite par la même sphère, et dans la même position de l'aiguille; soient δ la déviation au premier instant, et δ' sa valeur observée à la seconde époque; appelons c et c' les complémens de

l'inclinaison magnétique aux mêmes instans ; représentons par $\nu - \alpha$ et $\nu + \alpha$, les valeurs correspondantes de l'angle que nous avons désigné plus haut par ν, en sorte que 2α soit la quantité dont la direction naturelle de la boussole horizontale s'est rapprochée de l'est, dans l'intervalle de la première à la seconde observation ; les autres quantités k, a, r, u, contenues dans l'équation précédente, n'auront pas varié : si donc on forme d'après cette équation les valeurs de tang c et tang c', et qu'on en prenne ensuite le rapport, on aura

$$\frac{\text{tang}\, c'}{\text{tang}\, c} = \left(\frac{\cos(\nu+\alpha) - \sin(\nu+\alpha)\,\text{tang}\,\delta'}{\cos(\nu-\alpha) - \sin(\nu-\alpha)\,\text{tang}\,\delta} \right) P,$$

en faisant, pour abréger,

$$P = \frac{\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\text{tang}\,\delta - \frac{3ka^3}{r^3}\left[\cos(\nu-\alpha) - \sin(\nu-\alpha)\,\text{tang}\,\delta\right]\sin^2 u \sin(\nu-\alpha)}{\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\text{tang}\,\delta' - \frac{3ka^3}{r^3}\left[\cos(\nu+\alpha) - \sin(\nu+\alpha)\,\text{tang}\,\delta'\right]\sin^2 u \sin(\nu+\alpha)}.$$

Vu la petitesse de l'angle α, cette formule se réduira à

$$\frac{\text{tang}\, c'}{\text{tang}\, c} = \frac{\left[\cos(\nu+\alpha) - \sin(\nu+\alpha)\,\text{tang}\,\delta'\right]\text{tang}\,\delta}{\left[\cos(\nu-\alpha) - \sin(\nu-\alpha)\,\text{tang}\,\delta\right]\text{tang}\,\delta'},$$

quand on aura eu soin de prendre l'angle ν aussi très-petit, et que la distance r sera assez grande par rapport à a pour qu'on puisse négliger les produits $\frac{a^3}{r^3}\sin(\nu-\alpha)$ et $\frac{a^3}{r^3}\sin(\nu+\alpha)$. Elle aura alors l'avantage d'être indépendante de la quantité k et de la grandeur du rayon a de la sphère ; mais, pour plus d'exactitude, il faudra toujours faire subir aux quantités tang δ et tang δ' la correction relative à la longueur de l'aiguille, qui consistera à diviser chacune de ces tangentes par la valeur correspondante de $1 - \Delta$, comme nous l'avons dit plus haut.
